Didáctica de las Matemáticas

De preescolar a secundaria



Róbinson Castro Puche
Rubby Castro Puche

ECOE EDICIONES

ROBINSON CASTRO PUCHE

Licenciado en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Master of Arts Mathematics Education, Ball State University, Muncie, Indiana,USA.

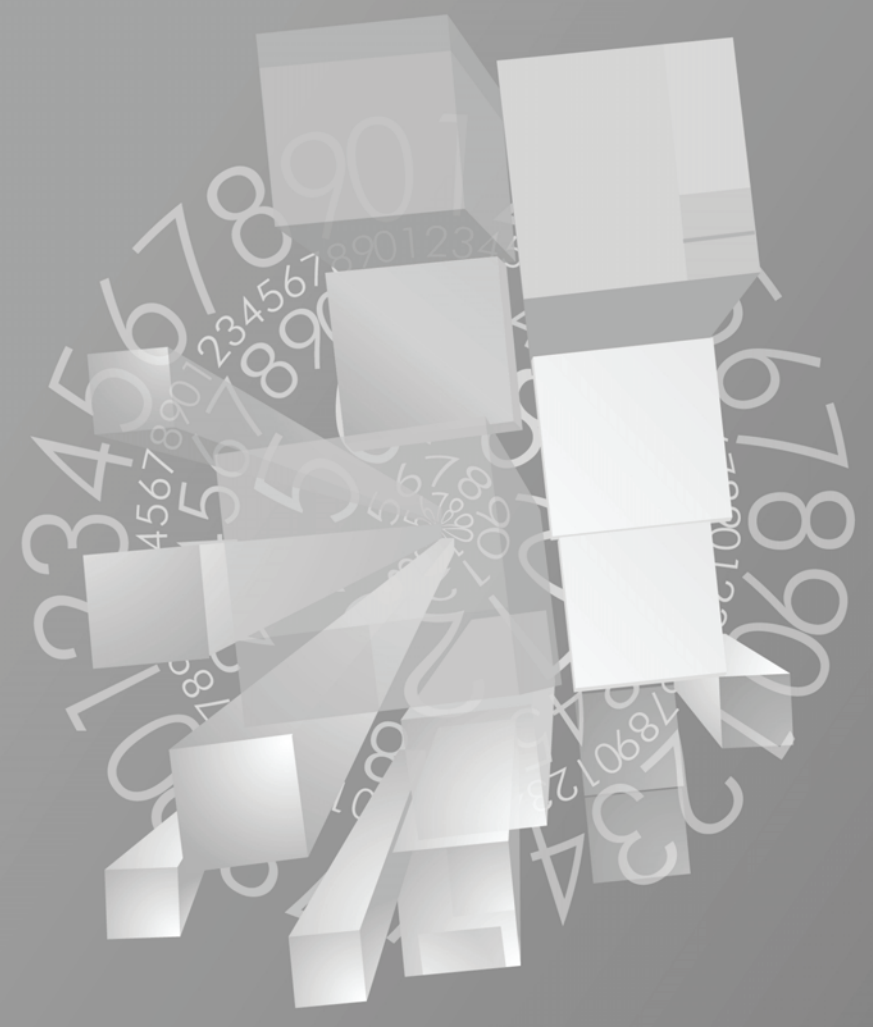
En la Universidad de Córdoba, en Montería, ejerció las funciones de secretario académico de la Facultad de Ciencias, director de la Oficina de Registro y Admisiones, director del Departamento de Matemáticas y profesor titular. También fue rector del Colegio El Carmen de Cotorra, Córdoba y entre diciembre de 1993 y noviembre de 1994, fue docente adscrito a la Universidad Nacional de Colombia.

RUBBY CASTRO PUCHE

Licenciada en Filosofía, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. Magíster en Docencia, Universidad de La Salle, Bogotá. Especialista en Administración Educativa, Universidad San Buenaventura, Medellín. Especialista en Diseño de Textos Escolares, Universidad Externado de Colombia, Bogotá. Coordinadora Diplomado en Docencia Universitaria, Universidad de Córdoba, Montería. Docente de tiempo completo, adscrita al Departamento de Artes y Humanidades, Universidad de Córdoba, Montería.

Didáctica de las Matemáticas

De preescolar a secundaria



Róbinson Castro Puche
Rubby Castro Puche

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Castro Puche, Róbinson
Didáctica de las matemáticas : de preescolar a secundaria/ Róbinson Castro Puche, Rubby Castro Puche. -- 1a. ed. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2011.
292 p. – (Textos universitarios. Educación y pedagogía)

ISBN 978-958-648-712-2

1. Matemáticas - Enseñanza 2. Psicopedagogía I. Castro Puche, Rubby II. Título III. Serie

CDD: 372.7 ed. 20 CO-BoBN– a761000

Didáctica de las matemáticas
(De preescolar a secundaria)

Montería - Colombia
robinson_castro_p@hotmail.com

ISBN: 978-958-648-712-2
Primera edición: 2011

Diagramación: En Latex realizada por Róbinson Castro Puche
Diseño de portada: Edwin Nelson Penagos Palacio
Impreso por: Litoperla Impresores Ltda.
Carrera 25 No. 8-81, Tel. 3171916

Impreso en Colombia
Depósito legal: Hecho.

A la memoria de Cielo, Isaac y Richard, los hermanos desaparecidos.

A Isaac, el hijo, e Isaac Miguel el, nieto.

A Olga, la esposa; Milton, Tania, Jaime y Glenna, los hijos;
Alejandro, Andrea, Paula, Valery y Daniel, los nietos.

Índice general

LOS AUTORES **v**

PRESENTACIÓN **vii**

PREFACIO **ix**

1. FUNDAMENTOS SICOLÓGICOS **3**
1.1. El conductismo de Watson 4
1.2. La teoría histórico-genética de Piaget 8
1.2.1. Períodos del desarrollo cognitivo 13
1.3. La construcción del conocimiento matemático 16
1.3.1. Los procesos del aprendizaje 17
1.4. El constructivismo social de Vygotsky 20
1.5. Preparación prenumérica 22
1.5.1. La clasificación 22
1.5.2. Relaciones entre conjuntos 23
1.5.3. Conservación de la cantidad 25
1.5.4. Los conceptos de correspondencia y orden 26
1.6. Modelos matemáticos constructivistas 29
1.7. Algunos ejemplos 36
1.8. La formulación de problemas 39

2. LOS ESTÁNDARES DE VALORACIÓN **45**
2.1. Indicadores de valoración del aprendizaje 47
2.2. La evaluación 54

2.3. Las pruebas objetivas . . . 56
2.4. La calificación . . . 59
2.5. Los estándares curriculares . . . 60
2.5.1. Estándares curriculares de preescolar a cuarto grado . . 62
2.5.2. Los estándares de quinto a octavo . . . 64

3. EL CONCEPTO DE NÚMERO 69
3.1. El sentido numérico . . . 69
3.2. La forma polinómica de los naturales . . . 75

4. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN 81
4.1. Preparación sicológica . . . 81
4.2. Significado de las operaciones . . . 82
4.3. Preparación para la suma . . . 85
4.4. La propiedad asociativa de la adición . . . 89
4.5. La propiedad conmutativa de la adición . . . 91
4.6. La diferencia . . . 97
4.7. El algoritmo de la resta . . . 101

5. EL PRODUCTO Y LA DIVISIÓN 103
5.1. Clases de productos . . . 103
5.2. La propiedad conmutativa del producto . . . 107
5.3. La propiedad asociativa del producto . . . 109
5.4. La propiedad distributiva . . . 109
5.5. La tabla de multiplicar . . . 111
5.5.1. El cero y el uno usados como factores . . . 113
5.6. El algoritmo de la multiplicación . . . 114
5.7. Medición . . . 116
5.8. La división . . . 120
5.9. La división como el inverso de la multiplicación . . . 124
5.10. La división como una sustracción repetida . . . 125

6. EL MATERIAL DIDÁCTICO 129
6.1. La balanza matemática . . . 129
6.2. El minicomputador de Papy . . . 133
6.2.1. El minicomputador. La suma . . . 135
6.2.2. El minicomputador. La resta . . . 139
6.2.3. El minicomputador. El producto . . . 140

6.2.4. El minicomputador. La división 142
6.3. El duplo, una forma de multiplicar 144
6.4. El método de Peasant 145

7. LOS NÚMEROS RACIONALES 147
7.1. Modelos para representar los racionales 147
7.2. El significado de número fraccionario 152
7.3. Fracciones equivalentes 155

8. OPERACIONES CON LOS RACIONALES 159
8.1. Adición y sustracción 160
8.2. El mínimo común múltiplo 164
8.3. El algoritmo 165
8.4. Los números mixtos 166
8.5. El producto 167
8.6. La división 169
8.7. Propiedades de las operaciones 172
8.8. Fracciones decimales 175
8.8.1. Operaciones con decimales 178
8.9. Razones, proporciones, porcentaje 179
8.9.1. Actividades para desarrollar el concepto de proporcionalidad 182
8.9.2. Propiedades de las proporciones 185
8.9.3. Porcentaje 188
8.9.4. Regla de tres y repartición proporcional 190

9. TEORÍA DE NÚMEROS 195
9.1. Potenciación 198
9.2. Operaciones con las potencias 200
9.3. El concepto de raíz 201
9.4. Raíces de orden superior 209

10. SISTEMAS DE NUMERACIÓN 213
10.1. Cambio de bases 215
10.2. Operaciones en base cualquiera 217

11. HACIA EL ÁLGEBRA **223**
11.1. Los números enteros 224
11.1.1. Un modelo matemático para jugar fútbol 225
11.2. Operaciones con los enteros 228
11.3. Los números racionales 237
11.4. Los números irracionales 238
11.5. Los números reales 240
11.6. Redondeo de cifras decimales 241
11.7. El razonamiento lógico 243
11.7.1. Las actividades 245
11.7.2. Patrones numéricos 246
11.7.3. Modelos para la formulación de problemas 253
11.7.4. El pensamiento geométrico 262
11.7.5. Actividades geométricas 264

LOS AUTORES

RÓBINSON CASTRO PUCHE

Licenciado en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
Master of Arts Mathematics Education, Ball State University, Muncie, Indiana, USA.
En la Universidad de Córdoba, en Montería, ejerció las funciones de secretario académico de la Facultad de Ciencias, director de la Oficina de Registro y Admisiones, director del Departamento de Matemáticas y profesor titular. También fue rector del Colegio El Carmen de Cotorra, Córdoba y entre diciembre de 1993 y noviembre de 1994, fue docente adscrito a la Universidad Nacional de Colombia.

RUBBY CASTRO PUCHE

Licenciada en Filosofía, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
Magíster en Docencia, Universidad de La Salle, Bogotá.
Especialista en Administracinón Educativa, Universidad San Buenaventura, Medellín.
Especialista en Diseño de Textos Escolares, Universidad Externado de Colombia, Bogotá.
Coordinadora Diplomado en Docencia Universitaria, Universidad de Córdoba, Montería.
Docente de tiempo completo, adscrita al Departamento de Artes y Humanidades, Universidad de Córdoba, Montería.

PRESENTACIÓN

Didáctica de las matemáticas es una propuesta para abordar desde el sentir de quien aprende aquellas parcelas de la enseñanza y el aprendizaje que parecen difíciles de penetrar por la didáctica específica de la disciplina en referencia. Es posible que esta sea una de las razones por las que con poca frecuencia se ofrece a los docentes obras que satisfagan las aspiraciones de profundizar en los fundamentos del conocimiento matemático y poder así refinar el ejercicio profesional.

En ese sentido, el presente texto genera toda una apertura al subrayar la orientación sicológica del aprendizaje y su influencia en las teorías y en la práctica pedagógica, ya que desmitifica la labor docente al ubicar al maestro en el plano de quien aprende, convirtiéndolo en un estudiante avanzado con capacidad de liderar los procesos de socialización planteados por los teóricos del conocimiento. Con esta perspectiva, amerita destacar que los autores hacen gala de sus destrezas al realizar la adecuación de los temas, ejemplos y esquemas al ámbito de la cultura y de las vivencias cotidianas que son familiares al lector potencial.

Estamos, sin duda, ante una herramienta valiosa para los interesados en conocer de cerca los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, cuyo mérito más destacado consiste en la forma de estimular al docente a reflexionar objetivamente sobre su desempeño académico.

Finalmente, los referentes bibliográficos utilizados constituyen un acervo complementario valioso para quien desee profundizar en las investigaciones de este tenor.

RAFAEL OBREGÓN, Msc.
Los Ángeles, California, USA. Julio de 2009

PREFACIO

En la medida en que el maestro aprenda a pensar como lo hacen los estudiantes, su labor será más fructífera.

Róbinson Castro P.

En el mundo actual, dominado por la tecnología y el cambio acelerado, el razonamiento matemático se ha vuelto imprescindible para el estudio de las ciencias en general. Razonar matemáticamente va más allá del simple cálculo. Involucra la habilidad de interpretar y resolver problemas, conocer las magnitudes y sus relaciones con las cantidades reales, las propiedades de las operaciones, la habilidad de interpretar los fenómenos y traducirlos al lenguaje de la matemática. Incluye también el sentido espacial, esto es, estar familiarizado con las figuras geométricas y las relaciones entre ellas.

Investigaciones en el campo de la educación han conducido a adquirir una nueva visión de cómo se aprenden los conceptos de número, fracciones, geometría y en general la inferencia lógica, base del desarrollo matemático formal. Por otra parte, la invasión de la tecnología ha relegado a un plano secundario la realización de los cálculos largos y complicados de años pasados, cuando estos se hacían usando solo papel y lápiz.

Si bien es cierto que todo estudiante debe dominar los fundamentos de las operaciones. que le permitan realizar cómputos mentales, estimaciones y otros aspectos relacionados, obtener la raíz cuadrada de un número de ocho dígitos es sencillamente una forma obsoleta de perder el tiempo, cuando se tiene una calculadora que lo hace en pocos segundos. Lo importante es comprender que:

$$\sqrt{a} = b, \text{ si y solamente si } b^2 = a.$$

Las calculadoras y el computador proveen de ayuda istruccional valiosa para la adquisición de conocimiento significativo, tal como el desarrollo polinómico de los enteros, la relación entre los fraccionarios y los decimales y la notación científica o exponencial. Contrario a la creencia de que estos aparatos atrofian la inteligencia, estudios al respecto muestran que son una herramienta pedagógica excepcional.

La tecnología ha cambiado los métodos de enseñanza. Esto es especialmente obvio en los grados superiores. Los gráficos estadísticos son ahora fáciles de dibujar usando software sencillo. En síntesis, la tecnología ha abierto caminos intransitables en el pasado.

Aprender es un proceso activo en el cual el aprendiz selecciona información y la elabora para extender o corregir estructuras cognitivas previas. Es ir hacia experiencias más eficaces que se aplican a condiciones cada vez más complejas; es pasar de estructuras incipientes a estructuras mejor acabadas. Enseñar, por tanto, no es solo transmitir conocimientos a quien no los posee; es un proceso de cambio de una organización conceptual simple a una más elaborada.

Nadie llega al conocimiento con la mente en blanco. Antes de recibir instrucción formal los alumnos han tenido la oportunidad de formarse ideas propias o preconceptos acerca de cómo funciona la naturaleza y han obtenido conclusiones con sentido lógico pero que pueden no estar ajustadas a la teoría aceptada.

Los preconceptos son habilidades y marcos de referencia que dotan de la capacidad para ir aprendiendo. Son las herramientas que permiten la labor de asimilación y ordenación de experiencias posteriores más complejas. Tienen el carácter de instrumentos y están ligados a la estructura de cada ciencia.

Pero los preconceptos en ocasiones pueden ser tan persistentes que dificultan la labor de acomodación. En un estudio se pidió a varias personas leer un texto que decía: *La rotación de la Tierra no genera gravedad.* Luego les preguntaron si los objetos caerían, suponiendo que la Tierra dejara de rotar. Una buena parte de los encuestados respondieron que no, a pesar del texto que acababan de leer.

Un resultado importante del anterior estudio, trasladado al aula, es que las oraciones negativas no son útiles para efectuar el cambio conceptual e incluso pueden reforzar los preconceptos ya que, como en el caso mencionado, se puede relacionar la rotación con la gravedad, olvidando que esta era una negación. Para ayudar a los estudiantes a desechar sus preconceptos y adoptar los conceptos correctos es indispensable mostrar los hechos en lugar de solo

narrarlos, y sobre todo mostrarlos de manera que entren en conflicto los preconceptos con la realidad experimental.

Una visión panorámica muestra que hoy la enseñanza de las matemáticas revela la controversia entre el modelo reproduccionista y la propuesta constructivista. Esta concibe la educación matemática como una acción sobre el pensamiento. que requiere explorar los preconceptos del aprendiz, los referentes culturales y las exigencias locales, nacionales e internacionales, en un intento por aproximar el contexto y las demandas lógicas de este saber con las demandas de pensamiento de los sujetos sometidos a procesos de aprendizaje matemático.

En lo referente a propiciar la solución de problemas del entorno como estrategia para aprender matemática, el maestro debe explicitar la interacción entre conocimiento específico y procesos reales. Por esta razón, la interacción con otras disciplinas debe ser un proceso permanente integrado al proceso educativo, de manera que sea el contacto con la realidad lo que permita al estudiante identificar permanentemente situaciones problémicas que podrían ser solucionadas desde el saber matemático, mediante sus propias decisiones, con el objeto de encontrar multiplicidad de respuestas al problema planteado. Igualmente, se deben precisar los recursos que se requieren para implementarlas, reflexionar y evaluar para comprender las consecuencias de lo actuado, replantear y revisar estrategias para permitir a quien aprende matemática comunicar, apropiarse de su saber y de la ciencia en general a la cual puede tributar.

Por otro lado, es imposible enseñar lo que no se sabe; por esta razón es imprescindible que el educador conozca en forma integral lo que enseña. La historia de la disciplina muestra cómo se fue afinando la teoría a través de la organización de los conceptos, los cambios producidos, los errores del pasado. Los conceptos que un día fueron tenidos como verdaderos y posteriormente fueron revaluados son una muestra de las concepciones ingenuas de los estudiantes. Situaciones que inducen a concluir en lo inacabado de todo el conocimiento humano.

Para concluir, es indispensable que el docente tenga la claridad suficiente y necesaria acerca de la relación entre el conocimiento y la didáctica, lo cual le permitirá plantear objetivos y contenidos relacionados con el carácter evolutivo, contextual y diverso del pensamiento de los aprendices, sin descuidar los afectivos, estéticos y actitudinales.

En concordancia con lo expresado, en la presente obra se desarrollan once capítulos. En el primero se registran los fundamentos de las teorías sicológicas

de más relevancia en las construcciones pedagógicas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En el segundo se aborda la reflexión sobre la valoración del aprendizaje desde el punto de vista de los estándares y su incidencia en el currículo de dicha área. A partir del capítulo tres y hasta el quinto se presentan los conceptos básicos de número y las operaciones aritméticas; en el sexto se describen algunos elementos didácticos, con el propósito de develar sus ventajas pedagógicas.

Los capítulos siete a diez versan sobre los racionales positivos y sus operaciones, la teoría de los números y sus diferentes sistemas de escritura. El capítulo once cierra el ciclo de fundamentación matemática básica con la presentación de los enteros, los racionales y los irracionales, concluyendo con una presentación suscinta de los reales. En esta sección se estudian variados ejemplos para mostrar cómo a partir de las relaciones aritméticas entre las cantidades se puede aprender matemática al formular problemas inducidos por estas relaciones. Se finaliza con un estudio de los fundamentos lógicos del aprendizaje de la geometría desarrollado por los educadores holandeses Pierre y Dina van Hiele.

Los autores.
Montería, julio de 2009

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
(De preescolar a secundaria)

Capítulo 1

FUNDAMENTOS SICOLÓGICOS DEL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA



Jean Piaget.

Introducción

A lo largo de la historia de la educación han existido diferentes modelos de enseñanza de la matemática, los cuales han evolucionado a partir del desarrollo de la propia disciplina, de los aportes de la psicología relacionados

con las teorías del aprendizaje, de la sociología, la epistemología y de las teorías pedagógicas; especialmente estas últimas porque a ellas corresponde dilucidar lo referente al método de enseñanza. Un breve recorrido sobre los diferentes modelos educativos matemáticos y los aspectos centrales de su postura cognitiva, muestra el siguiente estado.

Tradicionalmente la matemática ha sido enseñada con el criterio de ser una disciplina casi inasequible para las inteligencias promedio, lo cual está asociado con la poca comprensión de la misma. Los problemas centrales de su didáctica conciernen a las raíces teóricas en que se fundamenta, el carácter deductivo y en gran parte a los procedimientos de su trasmisión. En muchas ocasiones los programas educativos y métodos usados en las escuelas son conductistas y tienen en común una total desatención por desarrollar en sus aprendices un pensamiento matemático auténtico; esto se debe a que se omite o se trata oblicuamente la cercanía de este saber con el contexto cultural del aprendiz, y con las vivencias cotidianas, así como el escrutinio crítico, la revisión continua y el análisis holístico del proceso de su aprendizaje y enseñanza.

Desde esta perspectiva, una investigación y un análisis razonable sobre la formación matemática requiere de la revisión profunda de su epistemología y también de la reflexión sobre otros dos aspectos básicos: cómo se aprenden los conceptos de esta asignatura y la forma de orientar a los profesores desde la pedagogía y la didáctica correspondientes, para que asuman una nueva visión de lo que representa el conocimiento matemático a partir de la lógica de construcción de este saber y el sustento de las teorías sicopedagógicas para generar ambientes adecuados. Ambos factores son determinantes en la enseñanza de la matemática.

Por razones metodológicas iniciamos esta propuesta, cuyo principal objetivo es contribuir a transformar el aprendizaje de la matemática, con una breve revisión de algunas teorías sicológicas que han influido en su enseñanza.

1.1. El conductismo de Watson

Al iniciar el siglo pasado los sicólogos norteamericanos, en disidencia con el sentir de los colegas alemanes, elaboraron una nueva teoría relacionada con el comportamiento humano, dicha tendencia la denominaron *Conductismo*, y estaba centrada en la conducta como el único objeto de estudio posible de observar y medir en un laboratorio.

John B. Watson (1878–1958) es considerado el representante más notorio del movimiento conductista. En 1913 publicó un artículo, cuyo título traducido al español, corresponde a *La Sicología desde el punto de vista del conductismo*, donde, además de extender los principios del comportamiento animal a la sicología humana, le otorga a dicha disciplina el carácter experimental a través del desarrollo del método experimental o deductivo.

En 1925 apareció su obra *Conductismo* donde se evidencia la influencia del positivismo de Augusto Compte, al ubicar la sicología en el mismo plano de las ciencias naturales mediante la revisión del vocabulario definido por el subjetivismo; dentro de estos términos figuran percepción, sensación, pensamiento y emoción.

Para el positivismo el único conocimiento auténtico es el científico y tal conocimiento solo puede surgir de la afirmación positiva de las teorías a través del método deductivo. Las actividades científicas deben efectuarse únicamente en el marco del análisis de los hechos reales verificados por la experimentación; por lo tanto, solo es correcto estudiar los fenómenos observables.

Watson aseguraba que la conducta era una cuestión de reflejos condicionados, es decir, de respuestas aprendidas. Consideró al miedo, a la ira y al amor como los tres únicos instintos innatos. Definió la conducta como *todo lo que realiza un sujeto*, actos que son observables y por consiguiente dignos de ser estudiados. Para él la conducta observable, esto es, la actividad del organismo en su conjunto y las relaciones entre el estímulo y la respuesta, han de ser el objeto principal del estudio de la sicología, más que el examen del estado mental interno del individuo.

En su opinión, el análisis de la conducta era el único método objetivo para conseguir la penetración en las acciones humanas y extrapolar el método científico a la sicología. En concordancia con lo anterior, las funciones fisiológicas y el comportamiento son actividades físicas que deben estudiarse de acuerdo con los parámetros antes mencionados.

En su análisis parte del binomio estímulo-respuesta, entendiéndose por estímulo cualquier factor externo o cambio en la condición fisiológica del humano o animal, y por respuesta la reacción frente a tal estímulo. Desde este punto de vista la conducta obedece o es consecuencia de un estímulo y por lo tanto no es innata, lo que conlleva a asegurar que siempre es aprendida y por consiguiente el refuerzo es un factor preponderante en el proceso.

Es célebre su afirmación: *Si lo que importa es el ambiente, si la conducta depende del ambiente, reformemos favorablemente el ambiente y mejoraremos los seres humanos.* Basado en esta premisa Watson asegura que tomando una

docena de niños sanos bien formados para educarlos, y eligiendo uno de ellos al azar, se comprometía a adiestrarlo para que se convirtiera en un especialista de cualquier naturaleza, desde médico, abogado, artista, hombre de negocios hasta ladrón o mendigo, prescindiendo de su talento, inclinaciones, tendencias, aptitudes, vocaciones y raza de sus antepasados.

Watson pasó a la historia de la sicología por los experimentos realizados junto con Rosalie Rayner para demostrar sus teorías acerca del condicionamiento de la reacción al miedo. Seleccionó un niño sano de nueve meses, el pequeño Albert, a quien examinó para determinar si manifestaba una fobia previa a los objetos que se le iban a presentar (animales con pelo); obtuvo un resultado negativo pero identificó en el niño temor a los ruidos fuertes. Cuando tenía once meses y tres días le presentó un objeto blanco seguido de un ruido estridente. Después de varios ensayos el niño sollozó ante la presencia de una rata blanca y luego ante un bloque, un perro, un abrigo, y así sucesivamente.

Con respecto al aprendizaje, de acuerdo con Watson, nacemos con ciertas conexiones estímulo-respuesta llamadas reflejos, y podemos desarrollar una multiplicidad de nuevas conexiones mediante el proceso de condicionamiento.

El condicionamiento forma parte del proceso de aprendizaje, porque se debe responder ante nuevas situaciones así como se deben elaborar respuestas adecuadas. Se adquiere una conducta nueva y compleja mediante la combinación de reflejos simples.

Esta forma de aprendizaje se basa en los principios de frecuencia y de recencia. El primero establece que cuanto más frecuente sea una respuesta frente a un estímulo tanto más probable es que dicha respuesta se repita frente al mismo estímulo; el segundo establece que cuanto más reciente es una respuesta ante un estímulo, más probable es que la respuesta se reitere.

Por su parte, E. L. Thorndike (1874–1949) hizo énfasis en el valor del refuerzo. Consideró la ley del efecto como la regulación primaria del aprendizaje. Con esta ley va más adelante que los teóricos anteriores, porque establece que el aprendizaje no dependía solamente del hecho de que el estímulo y la respuesta se presentaran juntos sino de los efectos que seguían a la respuesta. Observó que si la conducta no tenía un refuerzo se debilitaba, es decir que la recompensa favorece las conexiones y el castigo no las debilita sino que las modifica.

De acuerdo con los análisis relacionados con la influencia del conductismo en la educación, el aprendizaje es la causa principal de la modificación del comportamiento, por lo tanto, la función relevante del maestro es crear

un ambiente apropiado para el refuerzo de la conducta en atención a que la teoría del aprendizaje que propone esta corriente está centrada en el comportamiento del individuo frente a las influencias del ambiente.

Dado que el comportamiento es aprendido por refuerzo o imitación, algún problema en la conducta de los estudiantes es considerado como una omisión o deficiencia en los refuerzos de la misma.

Esta versión de la pedagogía de la conducta recibió un impulso notable cuando a la luz del análisis experimental de la misma, o teoría de los refuerzos, se transformó el esquema *estímulo-respuesta* en *operación-respuesta-estímulo* al ser extrapolado a la educación en el contexto del desarrollo de la Enseñanza programada.

Este modelo, a pesar de no haber obtenido los resultados esperados, constituye un ejemplo evidente de la influencia conductista sobre la educación, el cual sigue teniendo vigencia a través de algunos elementos de carácter tecnológico que continúan siendo motivo de exploración y de controversia, entre otras razones, porque inducen a considerar las relaciones interpersonales como un peso que entorpece el aprendizaje en lugar de potencializarlo. En ese sentido plantea una presión negativa en los procesos de socialización de los individuos al desestimar y relegar la interacción entre sujetos como el espacio de integración ideal para la aceptación, escuchar y ser escuchados, entre otros.

Por excelencia, el conductismo alimentó el modelo pedagógico tradicional. De acuerdo con Josep Gascón (1994, 42), los aspectos formales e instrumentalistas que caracterizan el tránsito del modelo tradicional en la enseñanza de la matemática "comparten además una concepción psicológica ingenua del proceso didáctico, que tiene en el conductismo su referencia más clara y que considera al alumno como una caja vacía que debe llenarse a lo largo de un proceso gradual o bien como un autómata que mejora el dominio de las técnicas mediante la simple repetición". Esta situación se ve reflejada en una didáctica que consagra la interacción unilateral entre el medio de aprendizaje y su operador, lo que no deja otra alternativa que el refuerzo permanente de las respuestas correctas para garantizar la reafirmación del aprendizaje.

Sin embargo, en virtud de la coexistencia de las teorías tradicionales del conductismo con las teorías modernas, como la genética de Piaget y la sociocultural de Vygotsky, hoy se registran tendencias en el marco de la Enseñanza programada que reviven las raíces del conductismo mediante la utilización de programas educativos computarizados. Este reavivamiento se fundamenta en una perspectiva conductista cuyo mejor argumento consiste en considerar

ventajoso que la enseñanza programada libere al alumno del peso de las relaciones de simpatía y antipatía hacia el profesor y sus discípulos, porque lo ayuda a realizar de esta manera el proceso de aprendizaje sin perturbaciones de tipo emocional social.

1.2. La teoría histórico-genética de Piaget

Con el fin de visualizar las perspectivas teóricas de la pedagogía relacionadas con la enseñanza de la matemática sustentadas en los aportes del sicólogo, epistemólogo y matemático suizo Jean Piaget(1896–1980), seguiremos las lucubraciones de Héctor Manuel Jacobo García y Salvador Hernández Villalobos, investigadores mejicanos de la Universidad Autónoma de Sinaloa, quienes ilustran la incidencia del modelo pedagógico tradicional en la enseñanza de la matemática.

Anotan los autores mencionados que dicho modelo, de corte conductista, agrupa las tendencias, que poniendo el acento en los conocimientos acabados y cristalizados en las "teorías", consideran la resolución de problemas como un aspecto secundario dentro del proceso didáctico. La actividad matemática se pone entre paréntesis y solo se toma en consideración el fruto final de esta actividad. En particular se ignoran las tareas dirigidas a elaborar estrategias de resolución de problemas y, por tanto, los problemas tienden a ser segmentados y descompuestos en ejercicios rutinarios. Es decir, los problemas o ejercicios están absolutamente determinados por la teoría a la que sirven.

El modelo tradicional incuba en los matemáticos la idea de ir tras los fundamentos de la matemática, y en procura de tal fin hacen énfasis en la teoría de conjuntos y en la búsqueda de rigor lógico, en detrimento del pensamiento geométrico.

Bajo esta escuela se incurrió en un excesivo instrumentalismo y en el fomento de la presentación de los temas matemáticos en forma tensa, es decir, rigurosa, desprovista de motivación y en algunos casos tan cuidadosamente pulida que resulta casi ininteligible. Esta visión se manifestó en el siglo pasado a principios de la década de los setenta.

Este instrumentalismo plantea, primordialmente, solo aquellos ejercicios que sirven para llegar a dominar los procesos algorítmicos. Como consecuencia se hace apología al dominio de las técnicas, especialmente de las algorítmicas que son las más visibles, como objetivo último del proceso de aprendizaje. La exclusión de las estrategias no algorítmicas conlleva al planteamiento so-

lamente de aquellos ejercicios que sirven para llegar a dominarlas.

El énfasis tan exclusivo en las técnicas simples hace olvidar otras características de los problemas, en las cuales la dificultad principal consiste en elegir las opciones adecuadas para plantear estrategias de resolución de un repertorio amplio de problemas.

Durante mucho tiempo la aritmética fue considerada como la ciencia de los números, la geometría el estudio de los objetos en el espacio, el análisis el desarrollo de las funciones, y así sucesivamente. Sin embargo, cada vez con mayor frecuencia, técnicas y resultados de una de estas fracciones se mostraban útiles en otras. A lo largo del siglo XIX fue poniéndose en evidencia que lo relevante no era la naturaleza de los objetos estudiados sino las relaciones entre ellos. Así surgen los grupos, anillos, campos, espacios vectoriales formados por elementos de diferente naturaleza, pero que gozan de relaciones y propiedades comunes. A partir de Gauss se hace más evidente que la clasificación tradicional de la matemática era inadecuada.

Pocos nombres han tenido una mayor influencia en el desarrollo de la matemática del siglo XX que el de Nicolás Bourbaki, seudónimo adoptado por un grupo de matemáticos franceses fundado inicialmente por Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt y André Weil. Enfrentados al problema de la organización de la matemática se propusieron como objetivo la elaboración de un tratado que, partiendo desde el principio, contuviera los fundamentos y resultados básicos de toda la matemática pura.

Bourbaki es partidario del modelo axiomático admitiendo que no hay que confundirlo con el formalismo lógico. Lo que el método axiomático se propone como objetivo esencial es lo que el formalismo lógico, por sí solo, es incapaz de dar, esto es, la profunda inteligibilidad de las matemáticas.

El método axiomático se basa en la convicción de que la matemática no es una mera concatenación al azar de silogismos ni tampoco es una colección de trucos más o menos astutos a los que se llega por medio de una serie afortunada de combinaciones. Enseña a buscar las razones profundas, a encontrar las ideas comunes a varias teorías sepultadas bajo la acumulación de detalles propios de cada una de ellas. El método axiomático y las estructuras permiten al matemático una considerable economía de pensamiento.

Esta evolución en la organización de la matemática, que para 1930 ya había ocurrido en el álgebra, trató de extenderla Bourbaki a toda la matemática, distinguiendo tres estructuras: algebraicas, de orden y topológicas.

Bourbaki concibió su obra para consulta y referencia del matemático pro-

fesional; nunca pensó que fuera introducida a un nivel inferior al de posgrado y mucho menos en la primaria o secundaria, como en efecto sucedió. Se extendió la idea de introducir en la primaria una serie de nociones abstractas, generalmente inútiles a ese nivel, lo que se denominó matemáticas modernas. Refiriéndose a esta situación Dieudonné afirma que "no se puede hacer responsable a un autor por el uso que algunas personas hayan hecho de su obra para justificar teorías o acciones que él nunca defendió".

Mientras en Europa se desarrollaban estos acontecimientos, en América Latina la enseñanza de la matemática consistía en proveer al estudiante de reglas para desarrollar cálculos y obtener respuestas correctas, las que debían ser avaladas por el maestro. Durante los años sesenta del siglo pasado, en la secundaria hicieron carrera los textos de aritmética, álgebra y geometría del maestro cubano Aurelio Baldor, cuyo éxito se debió a su forma original de enunciar reglas seguidas de ejemplos ilustrativos donde describía con detalles toda suerte de "trucos didácticos". En la primaria, los textos obligados eran los de la colección G. M. Bruño, editados para Colombia por la Procuraduría de los Hermanos de La Salle y en México por la casa Bouret, cuyo representante para el país Azteca era el señor Raoul Mille.

Por su parte, en las universidades las cátedras de matemática eran regentadas por ingenieros, donde se presentaba, como era previsible, la misma situación. Las integrales, por ejemplo, eran consignadas en tablas y la ayuda por excelencia era la regla de cálculo.

Con la aparición de la "*matemática moderna*" los textos anteriores fueron proscritos y las casas editoriales iniciaron una competencia para convencer al maestro de la bondad de sus productos. Con la *visión moderna* se dio prioridad al desarrollo axiomático dedicado casi que exclusivamente a la construcción de los diferentes sistemas numéricos, desarrollo de sus propiedades y al estudio de las relaciones entre ellos. A partir de este enfoque toda la matemática giró alrededor de la teoría de conjuntos, olvidando las recomendaciones de la escuela de Nicolás Bourbaki.

La incidencia de la teoría Piagetiana y el constructivismo social Vygotskiano de la formación social de la mente en la enseñanza de la matemática cristaliza, con el apoyo de algunos investigadores matemáticos que ven con buenos ojos el constructivismo, como una propuesta alterna. En general, los cultores del tema perciben en el modelo constructivista un papel integrador, tanto de las investigaciones en los diferentes aspectos de la enseñanza–aprendizaje de la matemática, como de los aportes procedentes del campo de la sociología, la epistemología y la psicología del aprendizaje. De este modo,

las propuestas constructivistas se convirtieron en el eje de una transformación fundamental de la enseñanza de la matemática.

Así termina la hegemonía de la práctica pedagógica tradicional de la mera transmisión, que concebía la enseñanza de la matemática como un producto elaborado que debía ser trasladado al estudiante mediante un discurso que le permitiera "vencer su ignorancia". El proceso de renovación de la enseñanza de la matemática exigía nuevas características y se debía enfrentar con las dificultades de un nuevo modelo.

Sin embargo, tras varias décadas de esfuerzos innovadores no se ha producido una renovación efectiva de la enseñanza de la matemática. Este hecho puede ser atribuido a la falta de comprensión de la coherencia global de los diferentes modelos propuestos y a la ausencia de un nuevo modelo capaz de dar respuesta a las dificultades encontradas.

Según Paul Ernest (1992) se distinguen dos tipos de constructivismo. El constructivismo radical, el cual tiene como fundamento la teoría Piagetiana y el constructivismo social, el cual tiene como base la teoría Vygotskyana de la formación social de la mente. Por su formación matemática, Piaget resulta a todas luces interesante; sin embargo, lo primero que tenemos que hacer es entender claramente la propuesta de cada uno de ellos.

Kilpatrick (1987) sostiene que el constructivismo radical y el constructivismo social tienen dos principios en común:

1. El conocimiento es construido por el que conoce; no se puede recibir pasivamente del entorno.

2. El proceso de conocer es una acción de adaptación del sujeto al mundo de su propia experiencia. Por lo tanto, no es posible descubrir un mundo independiente y pre-existente fuera de la mente del que conoce.

El primer principio no es cuestionable. Es evidente que la bifurcación del constructivismo (en radical y social) surge del segundo principio y sus interpretaciones. Sobre todo, es obvio que lo primero que debemos abordar es, qué se entiende por "proceso de adaptación al mundo de la experiencia".

Jean Piaget, en contraste con la teoría del estímulo-respuesta, sostiene que la mente humana es similar a un computador. Asegura que el cerebro no es un mecanismo de reacción obediente a acciones externas. Es en esencia un analizador, o para expresarlo mejor posee una estructura lógica que le permite operar por sí mismo en la solución de problemas sin la imperante necesidad de estímulos exteriores. Según esta tendencia el conocimiento se adquiere

mediante un proceso de construcción antes que por la mera observación y acumulación de información.

Después de innumerables interacciones con grupos de sujetos jóvenes comenzó a descubrir los secretos del aprendizaje humano. Sostenía que detrás de las agudas ideas infantiles, aparentemente ilógicas, se escondía un proceso de pensamiento con una clase propia y especial de lógica; concluyó que la mente no es un recipiente vacío que debe ser llenado con información, sino que es, por el contrario, constructora activa de conocimiento. Afirma que los infantes son pequeños científicos que están permanentemente creando y evaluando sus propias teorías del mundo. Asegura, además, que la estructura lógica de la mente de los párvulos no es la misma que la de los adultos, y por ende, el proceso mental de los primeros difiere del de estos últimos y hasta los once o doce años no alcanza la etapa de operación de los mayores.

Con este presupuesto sostiene que los procesos de instrucción de los menores deben ser ejecutados con base en el nivel de desarrollo individual teniendo en cuenta que el efecto de la acción educativa está condicionado por su nivel de desarrollo cognitivo. Se debe resaltar que a cada uno de los estados del desarrollo intelectual le corresponde una organización mental propia que propicia un nivel de razonamiento basado en las experiencias anteriores.

Sus principales ideas iniciales provienen de James Baldwin, de quien toma las nociones de adaptación por asimilación y acomodación en circularidad o retroalimentación. A través de este investigador le llega el influjo de la filosofía evolutiva de Spencer, filosofía alimentada por la teoría de Darwin. Piaget emprende así su teorización y logra sus descubrimientos teniendo una perspectiva que es al mismo tiempo biológica, lógica y psicológica, reuniéndose en una nueva epistemología. Es por ello que nos habla de una epistemología genética, la cual relaciona con la investigación de las capacidades cognitivas.

En cuanto al término genética lo usa para referirse a la investigación de la génesis del pensar en el humano, aunque ciertamente reconoce que tal génesis tiene en gran proporción patrones que derivan de la herencia genética. Sin embargo, y es uno de sus grandes descubrimientos, el pensar se despliega desde una base genética solo mediante estímulos socioculturales, así como también se configura por la información que el sujeto va recibiendo; esta información la aprende siempre de un modo activo por más inconsciente y pasivo que parezca el procesamiento de la información.

Con esta fundamentación, Piaget categoriza que los principios de la lógica se desarrollan antes que el lenguaje y se generan a través de las acciones sensoriomotoras del bebé, en interacción e interrelación con el medio, y

en especial con el sociocultural. En *La psicología de la inteligencia* (1947) resume sus investigaciones psicogenéticas de la inteligencia, postula que la lógica es la base del pensamiento y que, en consecuencia, la inteligencia es un término genérico para designar al conjunto de operaciones lógicas para las que está capacitado el ser humano, yendo, entre otras, desde la percepción, la clasificación, substitución, abstracción, hasta —por lo menos— el cálculo proporcional.

En la *Teoría constructivista del aprendizaje* (1960) hace notar que la capacidad cognitiva y la inteligencia se encuentran estrechamente ligadas al medio social y físico. Así, considera que los dos procesos que caracterizan a la evolución y adaptación del psiquismo humano son los de la asimilación y acomodación. Ambas son capacidades innatas que por factores genéticos se van desplegando ante determinados estímulos en muy determinadas etapas del desarrollo.

Cuando una nueva información no resulta inmediatamente interpretable basándose en los esquemas preexistentes, el sujeto entra en un momento de crisis y busca encontrar nuevamente el equilibrio. Por esto en la epistemología genética de Piaget se habla de un equilibrio fluctuante, para lo cual se producen modificaciones en los esquemas cognitivos del niño, incorporándose así las nuevas experiencias.

1.2.1. Períodos del desarrollo cognitivo

En sus estudios Piaget describió una secuencia de cuatro estadios cognitivos muy definidos en el humano. En algunos prevalece la asimilación, en otros la acomodación.

El primero es el *Sensoriomotor* que va desde el nacimiento hasta aproximadamente un año y medio a dos años. El pequeño capta el entorno a través de sus reflejos y percepciones sensoriales. El conocimiento en esta etapa está basado en las funciones mentales que trae el niño, producto de la estructura genética individual. Las respuestas se encaminan hacia la supervivencia y limitan el comportamiento a una reacción al ambiente.

En este estadio el niño usa sus sentidos y las habilidades motrices para conocer aquello que le circunda, confiado inicialmente en sus reflejos y, más adelante, en la combinatoria de sus capacidades sensoriales y motrices. Así se prepara para luego pensar con imágenes y conceptos.

Las reacciones circulares primarias se manifiestan entre el primer y cuarto

mes de vida extrauterina. En ese momento el humano desarrolla reacciones circulares primarias, esto es: reitera acciones casuales que le han provocado placer, como la succión de su propio dedo en sustitución de la succión del pezón.

Las reacciones circulares secundarias ocurren entre el cuarto mes y el año de vida. El infante orienta su comportamiento hacia el ambiente externo en la búsqueda de aprender a mover objetos; para ello observa los resultados de sus acciones y reproduce un determinado sonido para obtener nuevamente la gratificación que le provoca.

Las reacciones circulares terciarias tienen lugar entre los 12 y los 18 meses de vida. Consisten en el mismo proceso descrito anteriormente, aunque con importantes variaciones. Por ejemplo: el infante toma un objeto y con este toca diversas superficies. Es en este momento cuando comienza a tener noción de la permanencia de los objetos; antes, si el objeto no estaba directamente estimulando sus sentidos para él, literalmente no existía.

Tras los 18 meses el cerebro del niño está potencialmente capacitado para imaginar los efectos simples de las acciones que está realizando. Ya puede realizar una rudimentaria descripción de algunas acciones diferidas u objetos no presentes que ha percibido. Está también capacitado para efectuar secuencias de acciones, tales como utilizar un objeto para abrir una puerta. Comienzan, además, los primeros juegos simbólicos del tipo «juguemos a tal o cual cosa».

La segunda etapa es la *preoperacional* que va desde los dos hasta aproximadamente los siete años. A partir del año y medio adquiere un conocimiento sensomotor del mundo de los objetos que le permite subsistir de manera aceptable en su medio. Ahora los objetos ocupan su conciencia, incluso cuando son sustraidos de su estructura de tiempo y espacio; adquiere el sentido de *permanencia de objetos.*

En esta etapa aprende a diferenciar los colores, contar sin tener idea del proceso involucrado y, a pesar de ser incapaz de generalizar o predecir hechos, puede apreciar las similitudes entre determinados objetos, lo que le permite realizar clasificaciones. Nota las diferencias en cantidad, de manera muy aproximada, y puede dominar cantidades muy pequeñas, las cuales reconoce por inspección.

Este estadio se caracteriza por la interiorización de las reacciones de la etapa anterior dando lugar a acciones mentales que aún no se pueden identificar como operaciones por su vaguedad, inadecuación o falta de reversibilidad. Son procesos característicos de esta etapa: el juego simbólico, la intuición, el

egocentrismo, la yuxtaposición y la irreversibilidad del pensamiento o inhabilidad para la conservación de propiedades.

La tercera etapa es la de *las operaciones concretas*, que se inicia entre los seis y siete años y llega aproximadamente hasta los once. En esta etapa comienza a asimilar la idea de número en una forma no mecánica; se marca el comienzo del pensamiento lógico formal, fundamento para llegar al concepto de número.

Al tiempo que se vuelve hábil en el uso de los símbolos, desarrolla el idioma hablado y gestual. La evolución de las capacidades de interiorización y simbolización alcanzan su plenitud hacia los siete años cuando comienza a realizar operaciones concretas. Con estas capacidades puede razonar acerca del mundo circundante y apreciar las relaciones existentes entre los objetos.

En esta etapa debe tener a la mano material concreto como base para abstraer las ideas matemáticas; de allí el nombre de esta etapa. A medida que el estudiante manipula los objetos es capaz de descifrar las ideas involucradas. No es suficiente explicar, mencionar o mostrar. Es necesario que el niño entre los cuatro y once años comience a aprender acerca del carácter abstracto de la matemática en forma inductiva usando objetos del mundo físico. Al decir de Piaget: *las palabras probablemente no son el camino corto para llegar al entendimiento; el nivel de entendimiento más bien modifica el vocabulario y no lo contrario.*

Cuando se habla aquí de operaciones se hace referencia a las operaciones lógicas inherentes a la solución de problemas. En esta fase no solo usa los símbolos sino que es capaz de hacerlo de un modo lógico y, a través de la capacidad de conservar, llegar a generalizaciones acertadas. Alrededor de los siete u ocho años adquiere la capacidad intelectual de conservar cantidades numéricas, longitudes y volúmenes líquidos; es decir, la capacidad de comprender que la cantidad se mantiene igual aunque se varíe su forma.

Antes, en el estadio preoperacional por ejemplo, el niño estaba convencido que la cantidad de un litro de agua contenido en una botella alta y larga era mayor que la del mismo litro de agua trasegado a una botella baja y ancha. En cambio, un niño que ha accedido al estadio de las operaciones concretas está intelectualmente capacitado para comprender que la cantidad es la misma en recipientes de muy diversas formas.

Alrededor de los siete u ocho años se desarrolla la capacidad de conservar los materiales. Por ejemplo: al tomar una bola de arcilla y manipularla para hacer varias bolitas, el niño ya es consciente que al reunirlas todas la cantidad de arcilla será prácticamente la bola original. A la capacidad recién mencio-

nada se le llama reversibilidad del pensamiento. Alrededor de los nueve o diez años el menor ha accedido al último paso en la noción de conservación: la conservación de superficies. Por ejemplo, frente a cuadrados de papel se da cuenta que suman la misma superficie aunque estén unidos o dispersos.

La cuarta etapa es la *del pensamiento lógico formal o del pensamiento adulto*, que se inicia aproximadamente desde los 12 años. El individuo que se encuentra en el estadio de las operaciones concretas tiene dificultad para aplicar sus capacidades a situaciones abstractas. Si un adulto le dice "si no te alimentas vas a enfermar", la respuesta del sujeto en el estadio de las operaciones concretas sería: "Yo no estoy enfermo". Es desde los 12 años en adelante cuando el cerebro humano está potencialmente capacitado para formular pensamientos realmente abstractos o del tipo hipotético deductivo.

El pensamiento lógico-matemático requiere de un alto nivel de raciocinio ya que debe ser independiente de las propiedades físicas de los objetos. Las abstracciones mentales en esta etapa son fundamentales porque van más allá de lo que se puede deducir solo con el comportamiento físico de los objetos.

Piaget plantea que existen cuatro factores que inciden en el aprendizaje: madurez, experiencia con el mundo físico, comunicación con otras personas y equilibrio. Se obtiene un real aprendizaje de las operaciones cuando el cerebro está en capacidad de realizar razonamientos internos de estructuración de las operaciones lógicas; esto es, cuando las actividades que se realizan con los objetos reales involucran realizaciones y propiedades que implican reversibilidad y asociatividad.

1.3. La construcción del conocimiento matemático

De acuerdo con los estudiosos del tema, aprender es un esfuerzo personal por el que los conceptos interiorizados, las reglas y los principios generales pueden ser aplicados en un contexto del mundo real y práctico. En este sentido, la tendencia es aceptar que el estudiante debe ser un participante activo en el desarrollo de su propio conocimiento. El aprendizaje debe estar centrado en quien aprende y no en quien enseña, dejando al maestro la labor de orientador del proceso. Un facilitador que sugiere estrategias radicalmente diferentes a las practicadas en el salón de clases tradicional, que anima al estudiante a

descubrir principios por sí mismo y a construir conocimiento mediante la solución de problemas reales o simulados con la participación de otros alumnos, colaboración conocida como proceso social de construcción del conocimiento. Entre las bondades de esta socialización cabe afirmar que los estudiantes mediante el trabajo ordenan sus ideas y comparten sus experiencias con otros, teniendo la oportunidad de elaborar lo aprendido y ser evaluados con justicia por los compañeros, lo que permite descubrir inconsistencias.

La forma de construcción del saber denominada constructivismo se fundamenta en la escuela sicológica cognitiva y las teorías de Piaget. Esta corriente pedagógica afirma que el conocimiento es un proceso mental del individuo que se desarrolla de manera interna conforme el sujeto obtiene información e interactúa con su entorno. Su accionar se sustenta en la premisa que el educando es el constructor de su propio conocimiento con la ayuda de algunas herramientas, materiales de trabajo y el esfuerzo individual. Las herramientas son el conocimiento previo, las ideas preestablecidas. El material de trabajo son los objetos del mundo físico circundante y los propuestos por la creatividad e ingenio del docente, sin olvidar que si la mente no se activa no se produce conocimiento.

1.3.1. Los procesos del aprendizaje

Los teóricos cognitivos plantean que aprender es la consecuencia de desequilibrios en la comprensión. El conocimiento está sometido a un proceso de cambio permanente. Se parte de un estado de equilibrio inicial para llegar a una fase de desequilibrio que necesariamente debe conducir a uno de reequilibrio ulterior, lo cual conduce a modificar sus patrones para construir otros nuevos.

En otras palabras, “el aprendizaje se forma construyendo nuestros propios conocimientos desde nuestras propias experiencias”. (Ormrod, J., 227).

Cuando las percepciones son familiares al sujeto, cosas que conoce, las asimila porque se ajustan a su entendimiento previo. Piaget se refiere a esta actividad mental como asimilación, esto es, el proceso mediante el cual se incorporan informaciones del mundo exterior a las estructuras cognitivas previamente construidas por el individuo. La asimilación ocurre cuando las experiencias se alinean con la representación interna del mundo. El sujeto asume la nueva experiencia en un contexto familiar. Esto explica por qué un mismo hecho es descrito de manera diferente por un niño, un joven o un adulto, en virtud de que sus esquemas cognitivos no son los mismos.

En ocasiones las percepciones no se ajustan o no tienen sentido para el discente. Para entender el mensaje conflictivo y arreglar el desequilibrio se deben adaptar o modificar las ideas preconcebidas o crear nuevas para ajustar el nuevo conocimiento; esta acción se conoce como acomodación y produce en la mente una modificación o crecimiento de la estructura cognitiva. La acomodación es el proceso de volver a evaluar la representación mental del mundo externo para adaptar nuevas experiencias. Cuando tenemos la certeza que el mundo funciona en una forma y encontramos que nuestra concepción es equivocada, fallamos. Examinando con otros criterios, esto es acomodando esta nueva experiencia, adicionamos conocimiento.

Piaget describió los mecanismos por los cuales el conocimiento es interiorizado por quien aprende basándose en las actividades mentales de asimilación y acomodación. En lenguaje constructivista el conocimiento no es una recepción pasiva a través de los sentidos, el conocimiento es construido por el sujeto objeto del conocimiento. Cuando se aprende se es capaz de establecer vínculos entre el nuevo y los anteriores materiales de aprendizaje, por lo tanto es necesario provocar una acción en el discente que lo induzca a construir nuevos valores modificando los anteriores. Esta construcción implica la participación del alumno en todos los niveles de su preparación y en esta tarea es responsabilidad del maestro inculcar actitudes de indagación y reflexión, asumiendo él mismo la labor de investigador crítico e imparcial que le permita afirmar el respeto hacia la diversidad de opiniones y las diferencias individuales.

Acerca del pensamiento de Piaget, Howard Gardner, en su libro *Estructuras de la mente* (1999), sostiene que a pesar de la vigencia de los planteamientos generales del científico suizo, muchos de los detalles específicos no son correctos. Asegura que las etapas individuales se adquieren en una forma mucho más continua y gradual que lo descrito por Piaget. Afirma que la mayoría de las tareas que supuestamente deberían ser ejecutadas en la etapa de las operaciones concretas las pueden resolver niños del nivel preoperacional con sólo realizar algunos reajustes.

Sentencia que hay pruebas que permiten deducir que los niños a los tres años de edad están en capacidad de adquirir la noción de la conservación de la cantidad, clasificar correctamente y abandonar el egocentrismo. Otro principio fundamental de Piaget es que las diversas operaciones descubiertas pueden aplicarse a toda suerte de contenidos. Gardner afirma que un niño que muestra la conservación de la cantidad con un determinado material puede

ser incapaz de realizarla con otro.

Una acotación de Gardner que resume nuestra posición y criterio dice así:

> La secuencia del paso de las actividades sensomotoras a las concretas y a las operaciones formales es la trayectoria de crecimiento que mejor ha salido en toda la sicología desarrollista. Si bien muchas de sus partes son susceptibles a la crítica sigue siendo la descripción del desarrollo contra la cual se siguen juzgando las demás formulaciones.
>
> He seguido su sendero con relación a un solo tema –el entendimiento del número y las operaciones relacionadas con los números; pero sería craso error sugerir que la secuencia está limitada al entendimiento numérico. En efecto la situación es completamente opuesta: de acuerdo con Piaget, esta secuencia de desarrollo se consigue en todos los dominios del desarrollo.
>
> Las etapas del desarrollo de Piaget son como gigantescas ondas cognoscitivas, que espontáneamente extienden sus principales maneras de conocimiento a través de todos los dominios importantes de la cognición.
>
> Para Piaget, el pensamiento logicomatemático es el aglutinante que unifica toda la cognición. (Gardner, 1999, 168).

Por su parte Castro y Caicedo afirman:

> El aporte central de Piaget radica en el papel protagónico y activo que le concede al sujeto a nivel de aprendizaje, proceso que se despliega de acuerdo a su teoría en dos grandes etapas que aparecen según la edad y se suceden de manera casi "espontánea".
>
> La primera, de desarrollo del pensamiento concreto en la infancia, es decir, el sujeto piensa acerca de los objetos desde la realidad externa y la segunda, de desarrollo del pensamiento formal, en la adolescencia, que es la etapa cuando el individuo piensa acerca de las ideas.
>
> Puede decirse que la aplicación de las ideas de Piaget en la escuela de alguna manera contribuyó a desplazar al maestro del escenario del aprendizaje, con lo cual la relación educador-educando sufrió serias desventajas para el maestro.
>
> En tanto que la construcción se centraliza en el estudiante, la participación del profesor pasa a ser marginal y periférica, casi semejante a la de un espectador y si se lleva al extremo ese planteamiento central, la escuela misma dejaría de ser imprescindible, porque el desarrollo intelectual no requeriría mediaciones externas. (Castro, 2008, 61).

1.4. El constructivismo social de Vygotsky



Lev Semiónovich Vygotsky.

Lev Vygotsky (1896–1934), considerado el precursor del constructivismo social, fundamenta su accionar en la tesis del "origen social de la mente". Según esta teoría, el individuo es el resultado del proceso histórico y social que se fundamenta en el desarrollo del lenguaje interrelacionado con las funciones mentales tanto inferiores como superiores, las habilidades sicológicas, la zona de desarrollo próximo, las herramientas sicológicas y la mediación. Las funciones mentales primarias o inferiores son aquellas que traemos al mundo, producto de los factores genéticos individuales. Limitan el comportamiento a una respuesta o reacción al ambiente. Las superiores son adquiridas y se desarrollan a través de la interacción social, es decir, se determinan por las características de la cultura específica de la colectividad. El comportamiento derivado de estas funciones está abierto a mejores horizontes.

De acuerdo con esta perspectiva el conocimiento es el resultado de la interacción social. Socialización que permite adquirir conciencia de lo que somos, aprender el uso de los símbolos que nos llevarán a afinar el pensamiento. Para

Vygotsky la interacción social es directamente proporcional a la calidad del conocimiento. El ser humano es esencialmente un ser cultural cuya relación con el ambiente se realiza a través de y mediante la interacción con los demás individuos. La siquis humana es un producto moldeado por la cultura. Hasta cierto punto somos lo que los demás son.

Las habilidades sicológicas se manifiestan primero en el ámbito social y en segunda instancia en el individuo como ser propiamente dicho. La atención, la memoria, la formulación de conceptos son primero un fenómeno social y posteriormente se transforman en una propiedad del individuo. Cada una de las habilidades sicológicas es primero intersicológica para después ser intrasicológica o personal. El paso de intersicológicas a intrasicológicas se denomina interiorización. El desarrollo del individuo se hace pleno en la medida en que hace suyas las habilidades intersicológicas. Esta apropiación le da la oportunidad de actuar por sí mismo y de asumir responsabilidades frente a su conducta.

En el proceso de interiorización la influencia de la colectividad es fundamental. El potencial que el individuo tiene para desarrollar las habilidades sicológicas en un primer momento depende de los demás. El potencial que es influenciado mediante la interacción lo denomina Vygotsky *zona de desarrollo próximo*. En otros términos es la posibilidad de los individuos de aprender en el ambiente social vía intercomunicación. El aprendizaje es la combinación de nuestras vivencias y las ajenas. Con esta visión la zona de desarrollo próximo está determinada socialmente. Los maestros, padres de familia y los compañeros son los responsables primarios del aprendizaje, pero es en última instancia el propio individuo el responsable de construir su conocimiento y modificar sus patrones de conducta.

Las herramientas sicológicas, tales como los símbolos, los diagramas, los signos, la escritura, los dibujos, los sistemas numéricos, son el puente entre las habilidades intersicológicas y las intrasicológicas, o usando otras palabras, entre lo social y lo personal. Estas herramientas moldean nuestros pensamientos, sentimientos y conductas. La principal herramienta sicológica es el lenguaje que nos permite tomar conciencia de nosotros mismos y ejercitar el control voluntario de las propias acciones. A través del lenguaje conocemos, nos desarrollamos y creamos nuestra realidad.

Una característica de los humanos es la apropiación de instrumentos usados para actuar material y físicamente sobre el medio circundante. Estos objetos propician el camino a la aparición de los signos que regulan la conducta social. Esta propiedad se denomina mediación semiótica. Los signos,

pero en especial el lenguaje y la escritura, actúan sobre la representación interna de la realidad, transformando la actividad mental de la persona quien los utiliza para regular la conducta social.

1.5. Preparación prenumérica

Con frecuencia se encuentran preescolares que cuentan y mencionan cifras numéricas. La generalidad de ellos lo hace en forma mecánica, capacidad menor muy distante del concepto de número. La noción de número sólo se adquiere después de haber cumplido ciertas condiciones preliminares, tales como las nociones de seriación y orden, conservación de la cantidad y equivalencia. Para llegar a estos conceptos se deben dominar algunas etapas previas como las siguientes:

1. Elaboración de los conceptos de conjunto, elemento y pertenencia.

2. Elaboración de los conceptos de serie y orden (mayorante, minorante e igualdad).

3. Elaboración del concepto de clasificación.

4. Elaboración del concepto de conservación de la cantidad.

1.5.1. La clasificación

Cuando un niño comienza a reconocer objetos nombrándolos ha iniciado la destreza de clasificar. Reconoce un banano, un mango, una naranja como objetos pertenecientes a tres tipos de conjuntos diferentes, que a su vez están contenidos en otra clase, la de los frutos comestibles, los cuales pertenecen a la superclase de los frutos.

La habilidad de clasificar involucra el pensamiento lógico y las operaciones mentales. El problema más elemental es el de agrupar objetos similares en alguna forma, esto es, con una propiedad común como el color, el tamaño o cualquier otra que defina o sea exclusiva de los objetos que se van a clasificar. Para desarrollar esta habilidad se debe indicar al niño que en un conjunto preestablecido, por ejemplo figuras geométricas de diferentes colores, tamaños y espesores, escoja un elemento que se parezca a otro previamente seleccionado. Puede ser otro que tenga la misma forma, tamaño, espesor, color u otra cualidad, requiriéndole una explicación verbal de su elección.

El juego “Una de estas cosas es diferente de las otras” es muy a propósito. Se muestran cuatro figuras de las cuales tres presentan alguna característica en común que no pertenece a la cuarta. El estudiante debe decidir cuál es diferente y explicar su razón; y los compañeros dirán si es correcta. El maestro debe valorar, ante todo, la calidad del razonamiento antes que la obtención de buenas respuestas.

Posteriormente pueden efectuar clasificaciones múltiples con dos o más propiedades: dado un objeto, seleccionar otros que se parezcan de una u otra forma, por ejemplo, que sean triángulos o sean pequeños; se deja al arbitrio del estudiante la elección de la cualidad, tarea que involucra la operación lógica de disyunción y por ende la operación conjuntista de unión.

Otra tarea consiste en solicitarle la selección de objetos que posean simultáneamente dos cualidades, por ejemplo ser triángulo y delgado. En este ejercicio aparecerán triángulos delgados azules, triángulos delgados rojos. Esta selección lleva al concepto lógico de conjunción y por consiguiente a la operación de intersección de conjuntos.

Otra forma de clasificación es mediante la negación de una cualidad, por ejemplo, seleccionar objetos que no sean cuadrados o aquellos que no sean cuadrados o no sean rojos o aquellos que no sean ni triángulos ni gruesos. Este tipo de selección nos lleva al concepto lógico de negación y por consiguiente a la operación conjuntista de complemento.

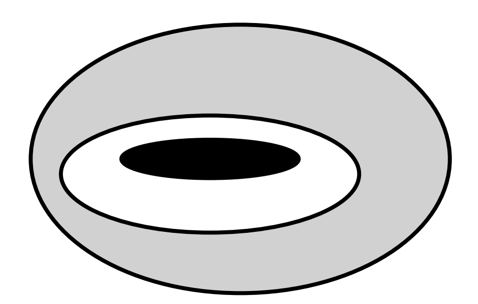
1.5.2. Relaciones entre conjuntos

Los conceptos todos, algunos y ninguno, son necesarios para establecer relaciones entre conjuntos pero tenga presente que usar apropiadamente estas ideas se les dificulta a los menores de siete años. Si mostramos a uno de estos menores fichas de madera de dos colores, blancas y negras, muy probablemente afirmará categóricamente que todas las fichas blancas son de madera y que todas las fichas de madera son blancas. Si es varón, al indagarle acerca de todos los hombres tal vez pensará que son “papá, mis hermanos y yo”.

La contenencia de clases está basada en el concepto lógico de inclusión. El escolar que no posea la habilidad de concebir este concepto está severamente limitado para llegar al concepto de número.

Supongamos que se desea elaborar una clasificación jerárquica entre las clases: “los niños de la ciudad de Montería”, “los estudiantes de la escuela Simón Bolívar de esta ciudad” y “los alumnos del cuarto grado de primaria de dicha escuela”. Se trata de verificar si los infantes son capaces de realizar

una clasificación jerárquica donde el primer conjunto incluya al segundo y este al tercero en la forma como aparece en el dibujo.



Representación del concepto de inclusión.

Debe quedar establecido que la clase de los niños de la ciudad de Montería está representada por la suma de las áreas gris, blanca y negra, mientras que la clase de la escuela Simón Bolívar está representada por las áreas blanca y negra, y finalmente la clase de los niños de cuarto grado está dada por el área negra.

Se harán preguntas como:

1. ¿Si todos los alumnos de la escuela son mayores de cuatro años, habrá en el cuarto grado alumnos menores de cuatro años? ¿Por qué?

2. ¿Si todos los estudiantes de cuarto grado están practicando fútbol, habrá estudiantes de la escuela en otras actividades? ¿Por qué?

3. ¿Todos los niños de Montería están matriculados en la escuela Simón Bolívar? ¿Por qué?

El niño podrá resolver correctamente estas y otras preguntas cuando sea capaz de decidir que si los estudiantes de la escuela Simón Bolívar son una subclase de los niños de Montería, es porque los niños de Montería son una superclase de los estudiantes de la escuela Simón Bolívar.

Es decir que todo estudiante de la escuela Simón Bolívar es un niño de Montería pero hay niños de Montería que no son estudiantes de la escuela Simón Bolívar.

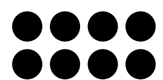
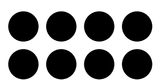
El proceso anterior se conoce como reversión del pensamiento. Es fácil para el estudiante aceptar que $5+3=8$ y no obstante se le dificulta descomponer 8 en dos sumandos, esto es, $8=5+3$.

A pesar que muchos textos de primero y segundo grado introducen el concepto de conjunto vacío, Piaget sostiene que no debe introducirse hasta los diez u once años. Para comprobar este hecho propone el uso de un juego de cartas con dibujos de variados animales y algunas cartas en blanco. Los estudiantes deben clasificarlas en DOS conjuntos. Piaget sostiene que los niños de siete a nueve años pueden clasificarlas, por ejemplo, en animales con plumas y animales sin plumas. No hacen el intento de clasificar las cartas en blanco, simplemente las ignoran a pesar de la orden de clasificarlas TODAS.

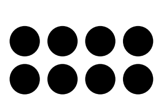
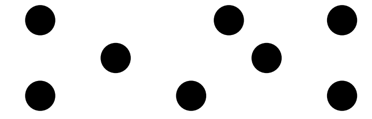
1.5.3. Conservación de la cantidad

El principio de la conservación de la cantidad asegura que esta es independiente de la forma de los objetos y su disposición, por lo tanto se conserva sin importar los cambios en estas características.

Esta observación es especialmente válida cuando se labora con conjuntos finitos observables sin dificultad. Una demostración de este principio consiste en colocar dos conjuntos iguales y preguntarle al infante si hay más objetos en uno o si el número de ellos es igual. Se repite la pregunta hasta obtener una respuesta correcta.

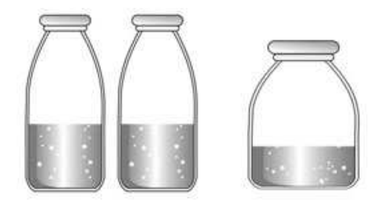
 

Posteriormente se cambia la disposición de un conjunto y se repite la pregunta. En el nivel preoperacional se piensa que hay más objetos en el conjunto que ocupa mayor espacio.

El razonamiento lógico indica que el número de objetos es invariante sin importar la forma o el arreglo; la reversión del pensamiento señala que los elementos pueden ser movidos a su posición inicial.

Otra comprobación consiste en llenar dos recipientes idénticos con la misma cantidad de líquido y posteriormente pasar el contenido de uno de ellos a otro de igual forma pero de base más ancha. La tendencia de quienes no han asimilado el principio es creer que hay más líquido en el envase donde se aprecia un mayor nivel.



Si usted aún tiene alguna duda al respecto ponga a un niño de cuatro años a escoger entre un billete de cinco mil pesos y cinco billetes de mil; y verá cómo el menor prefiere la segunda opción.



Paula clasifica cubos por tamaños: mediano, pequeño y grande

.

1.5.4. Los conceptos de correspondencia y orden

Aunque el niño en la etapa preoperacional cuente, en realidad solo recita mecánicamente una secuencia ordenada de números: a cada uno de ellos le aplica un objeto pero esto no significa que haya aprehendido el concepto de número, pues no sabe cuál es el mayor entre dos de ellos. Por estas razones, durante el período preoperatorio se deben realizar todas las operaciones en forma concreta sobre las cosas mismas sin introducir el simbolismo matemático. El trabajo debe ser con sustancias moldeables, líquidos, objetos sueltos

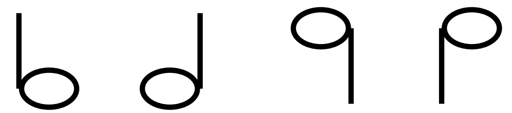
considerando longitudes y superficies, y realizando acciones de agregar y quitar y repartir.

La acción de correspondencia implica el establecimiento de un vínculo o nexo entre elementos. La acción de parear significa vincular un elemento de un conjunto con un elemento de otro. Se comienza por establecer correspondencias de objeto a objeto, esto es, del niño con su bicicleta, del maestro con su escritorio, del lápiz con el cuaderno.

Se prosigue con correspondencias de objeto a objeto con encaje, esto es, del niño con su camisa, del envase con la gaseosa, el vaso y el agua, la llave con la cerradura. Se denomina correspondencia con encaje porque un elemento está inmerso dentro del otro.

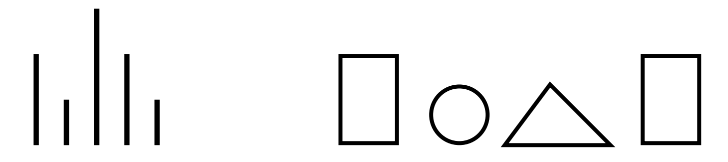
La correspondencia de objeto a signo vincula objetos con signos que lo representan, por ejemplo un cuchillo y un tenedor significan restaurante, una equis significa prohibición. La luz roja significa pare, la verde significa prosiga.

Una de las correspondencias de mayor dificultad es la de signo a signo; por ejemplo un óvalo con un segmento rectilineo de acuerdo con la posición, pueden significar: *be*, *de*, *cu*, *pe*.



La correspondencia término a término permite parear los elementos de un conjunto con los de otro; por ejemplo, los niños con sus maletines, de manera que cada niño tiene un maletín y cada maletín le pertenece a un niño. También se pueden establecer correspondencias entre más de dos conjuntos, por ejemplo un conjunto de blusas, uno de faldas y uno de niñas, de modo que haya una blusa por cada falda y viceversa y cada niña tenga su blusa y su falda sin sobrar blusas, niñas o faldas. Este tipo de correspondencia múltiple permite analizar las correspondencias reflexivas, simétricas y transitivas.

El ordenamiento natural está guiado por la intuición que lleva a ubicar los objetos de menos largo a más largo, y viceversa, si de longitud se trata, o de menor a mayor superficie o volumen, y recíprocamente. El orden no natural depende de una convención, por ejemplo:



La primera ordenación corresponde a la convención: mediano, corto, largo mientras que la segunda corresponde a: rectángulo, círculo, triángulo.

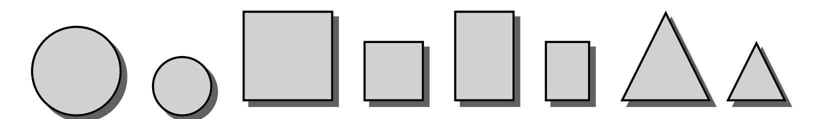
Se debe comenzar con dos elementos y reconocer por comparación la diferencia, por ejemplo, dos alumnos por su estatura, dos cuerdas por su longitud, dos frutas por su peso. Posteriormente se introducen otros elementos, orientando a los niños a que reconozcan o que descubran cuál fue el ordenamiento de la serie dada.

Los bloques lógicos de Dienes fueron pensados para graduar y variar las actividades sobre conjuntos y facilitar la iniciación de la lógica. Es una colección de cuarenta y ocho bloques de madera u otro material resistente. Tienen forma de círculos, cuadrados, rectángulos y triángulos. Para cada una de las cuatro figuras hay dos tamaños, grande y pequeño, dos espesores, grueso y delgado y tres colores, amarillo, azul y rojo.

La colección completa consta de: doce bloques de cada una de las cuatro formas, veinticuatro bloques delgados y veinticuatro gruesos, dieciséis amarillos, dieciséis azules y dieciséis rojos.

Mediante el uso de los bloques los conceptos lógicos de negación, disyunción y conjunción surgen de una manera natural, mediante la elección apropiada de las características de color, espesor, tamaño y forma, por ejemplo, la selección de las figuras que sean triángulos o tengan el color rojo o las que posean ambas propiedades simultáneamente. También es posible escoger aquellas figuras que no posean una determinada característica, y, en general, combinar tres o más propiedades incluyendo sus negaciones.

A continuación se presenta una ilustración parcial del material descrito.



El material didáctico debe usarse en forma natural, sin temor. Los términos elemento, conjunto y pertenencia se irán incorporando paulatinamente al vocabulario teniendo el cuidado de determinar con claridad y precisión cada concepto sin dar lugar a ambigüedades.

Una vez se obtengan conjuntos en el plano concreto se tratarán mediante representación gráfica con figuras recortadas. Más adelante se dibujarán los elementos y a mediados de la primaria se usará la representación simbólica. Al proceso de simbolización el impúber debe llegar con abundante ejercitación, volviendo al punto de partida cuantas veces sea necesario.

La escuela debe guiar al infante en su recorrido hacia el pensamiento lógico ayudando a la organización de las estructuras mentales que son prelógicas mientras se construyen intuitivamente (sin deducciones mediante el uso del material concreto), y que se tornarán lógicas a medida que el pensamiento se independice de los objetos reales y construya esquemas abstractos.



Andrea clasifica por figuras los bloques lógicos de Dienes.

1.6. Modelos matemáticos constructivistas

En vista que el conocimiento se evalúa por la cantidad y calidad de las conexiones o asociaciones que un individuo puede relacionar con otras ideas previamente establecidas, se colige que este depende en gran parte de la cantidad, calidad y relación de las ideas que se aporten a la adquisición de un nuevo concepto, situación que requiere trabajo y esfuerzo. Los conceptos y sus conexiones se desarrollan con el tiempo y no de un día para otro. El docente debe proveer de material instruccional y organizar a sus estudiantes en grupos que interaccionen entre sí y con su maestro. La interconexión de ideas convierte la enseñanza en una labor gratificante, incrementa el desarrollo intelectual y la habilidad para resolver problemas y relega la memoria a un segundo plano, al disminuir la cantidad de material que se debe recitar.

El aprendizaje se disfruta cuando la nueva información se conecta con las ya asimiladas, el nuevo conocimiento tiene sentido cuando se minimiza la actividad mental de acomodación. Cuando se aprende de memoria y se realiza un trabajo de rutina se está siempre a la espera de motivaciones externas traducidas en premios, necesidad de buenas notas, o de satisfacer a los padres, o miedo al fracaso. Estos estímulos son temporales y no permiten amar de verdad el trabajo escolar.

Los objetos físicos manipulables son una herramienta eficaz en el desarrollo de la madurez del conocimiento matemático. Sirven para representar modelos, pero no son la solución definitiva a los problemas del aprendizaje. Es importante que el maestro tenga una visión clara de sus bondades y de sus limitaciones en la construcción de las ideas.

Para garantizar el éxito con el manejo de los modelos es indispensable tener fundamentada la noción de las figuras geométricas. La geometría es una parte importante en el estudio de la matemática, ya que las primeras experiencias con la manipulación de objetos son geométricas antes que aritméticas. El sentido espacial se desarrolla a medida que se avanza en el nivel de escolaridad, razón por la que el educador debe propiciar la oportunidad de construir, medir, visualizar, comparar y clasificar patrones geométricos con el propósito de incrementar el grado de razonamiento en este campo.

Desgraciadamente en la actualidad el estudio de la geometría se ha reducido a la enseñanza superficial de tópicos elementales como las nociones de paralelismo, perpendicularidad, ángulo y área de las figuras planas más comunes. Desde el punto de vista de los sicólogos, la geometría no ha sido otra cosa que una experiencia melancólica para los estudiantes.

Por lo general el maestro asume que es suficiente ver un objeto en el espacio para inmediatamente reproducir en el cerebro una copia fotográfica. Por lo tanto presupone que si muestra al escolar un cuadrado, este debe ser capaz de representarlo mediante un dibujo en el plano.

Lo que el niño representa en su mente depende de la información suministrada por los sentidos, pero la representación del espacio en el cerebro involucra una operación del intelecto que concatene la información sensorial en un todo organizado.

Para representar un cuadrado, el menor debe primero manipular un modelo sólido recorriendo su contorno; mirarlo no es suficiente. La percepción de los sentidos desaparece y el éxito dependerá de la información almacenada.

Al principio, con frecuencia la información sensorial conduce a equívocos. A una edad temprana, si se tienen dos regletas idénticas, ubicadas vertical-

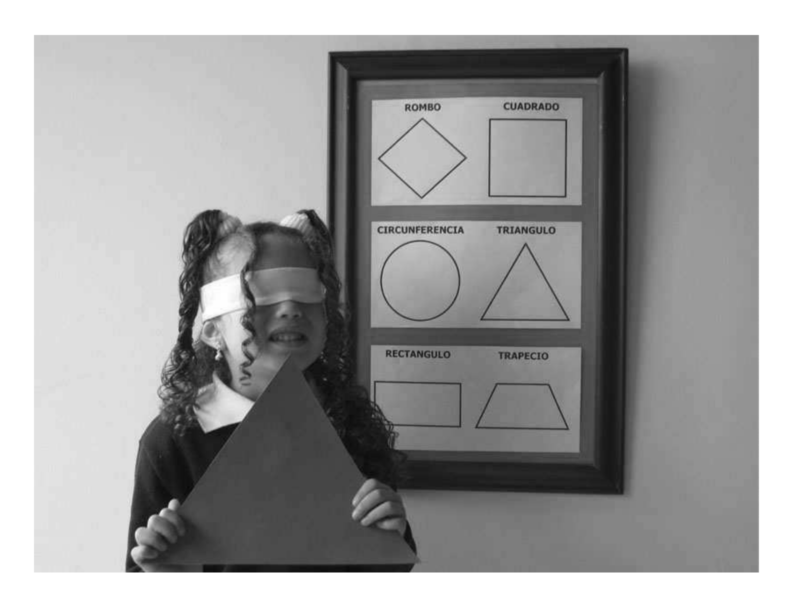
mente a la misma altura, y posteriormente se cambia de posición una de ellas, se piensa que la que ha quedado colocada más arriba tiene mayor longitud.

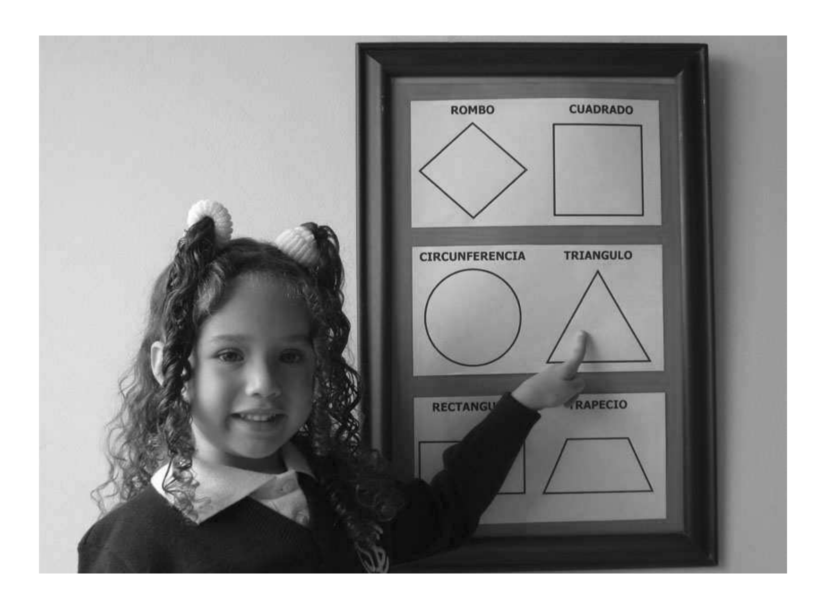
El maestro debe promover la habilidad de representación dejando que el estudiante manipule objetos que no pueda ver; por ejemplo, introduciendo figuras sólidas en una caja donde se ha abierto un agujero para que el escolar seleccione una y después de tocarla con ambas manos la identifique en una cartulina donde se han dibujado previamente. Este acto representa el traslado de la percepción táctil a la visual.

Una etapa más avanzada es la posibilidad de dibujar una figura que se ha manipulado; es decir, convertir la información de los sentidos en la representación mental de una idea, a través de una operación del intelecto.

La geometría estudia las figuras como formas rígidas, mientras que la topología las asume elásticas, de tal manera que se pueden dilatar o contraer pero no rasgar. La topología considera que las curvas cerradas son equivalentes porque una se puede derivar a partir de otra mediante alargamientos o contracciones. De una circunferencia se puede obtener un triángulo: imagine una circunferencia construida con un material flexible, si toma tres lápices y ejerce presión sobre el contorno obtendrá un triángulo. Piaget asegura que en los niños el concepto de espacio es primero topológico antes que geométrico.

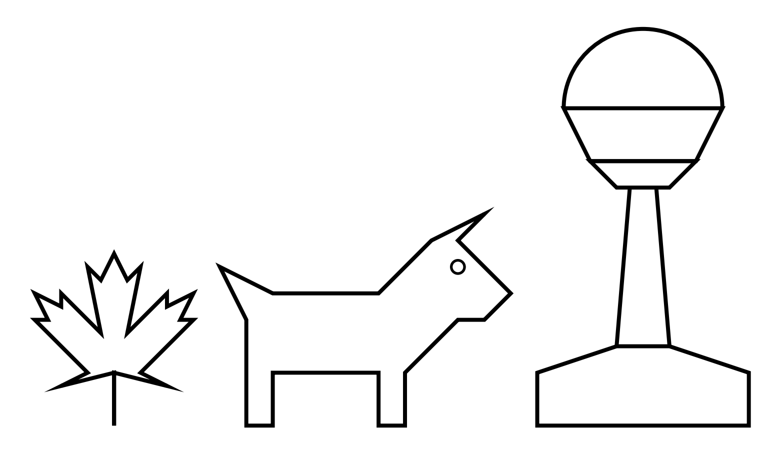
Sintetizando, cabe decir que primero se deben reconocer las formas para después dibujarlas, lo que equivale a afirmar que antes de operar con los modelos los debemos identificar plenamente.





En la gráfica anterior Paula manipula un triángulo sin verlo, en ésta lo identifica en una cartelera, trasladando la percepción táctil a la representación pictórica.

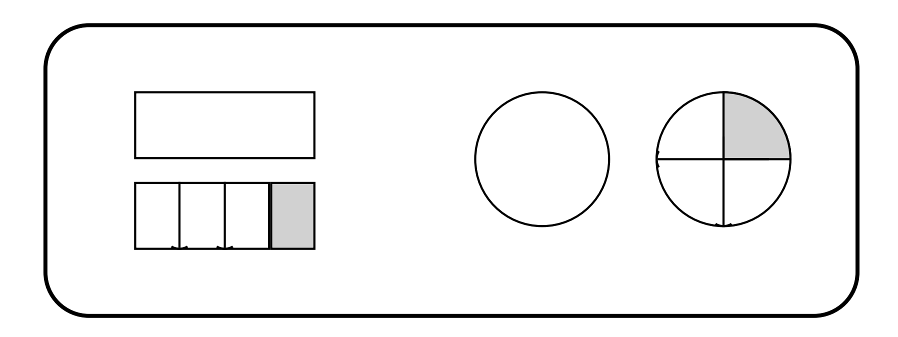
El *geoboard*, conocido en español como geoplano, es una ayuda didáctica consistente en un rectángulo de madera sobre el cual se ha construido una cuadrícula con tachuelas; es usado para formar figuras geométricas con bandas de caucho. Con este accesorio, o con papel, lápiz, regla y compás o con cartón, pegamento y cinta adhesiva, debemos dejar que el alumno desborde su imaginación y sienta el placer de recrear el espacio.



Antes de definir un modelo es necesario recordar que un concepto matemático es una idea lógica. El concepto de número fraccionario es la relación que un

determinado grupo de objetos tiene con respecto a un determinado elemento de la misma clase que se ha considerado como la unidad. Se puede hablar de tres cuartos de un aguacate, tres cuartos de un día, tres cuartos de litro, pero ninguna de estas expresiones es el número tres cuartos. Tres cuartos es la relación que tienen cada uno de estos elementos con un determinado objeto de su misma especie. Un modelo matemático es un objeto, un dibujo o cualquier otro simbolismo que representa el concepto, donde se puede visualizar la relación definida. Lo que el modelo hace es permitirnos ver con los ojos la relación que se quiere describir. Lo que se pretende con el modelo es que la mente del educando capte la relación definida, deshaciéndose de las propiedades físicas de los objetos que estos representan. Si nos abstraemos de la parte física solo queda la idea. Recordemos que el conocimiento es creado activamente por el estudiante y no se recibe pasivamente del maestro, los libros o los objetos físicos. Por lo tanto, desde el punto de vista de la didáctica, una forma de hacer significativo el conocimiento matemático es inducir a los estudiantes a reconocer las propiedades físicas de los objetos representados por los modelos.

El concepto de triángulo es una combinación espacial de relaciones entre tres puntos no colineales y los segmentos que los contienen. Por otra parte, dado un punto llamado centro y una distancia, la circunferencia es la combinación de relaciones entre los puntos coplanares y equidistantes con el centro, mientras que el círculo implica las relaciones entre el centro y todos los puntos coplanares con él que se encuentran a una distancia menor. Esta situación la asume la topología, asegurando que el círculo es abierto y la unión del círculo con la circunferencia es un conjunto cerrado. Estas ideas se pueden ilustrar mediante dibujos en una hoja de papel o recortando las figuras en cartón. Las zonas sombreadas son dos modelos del racional $\frac{3}{4}$ donde se observa la relación que guardan con los objetos que se han usado para representar la unidad.



Lesh Post y Bher (1987), sostienen que los conceptos son representables mediante cinco modelos: representaciones pictóricas, objetos manipulables, símbolos escritos, lenguaje oral y situaciones de la vida diaria. Mientras más se interrelacionen estas cinco formas, mayor probabilidad de éxito se tendrá. Ellos sostienen que los alumnos que tienen dificultad para realizar estas conexiones (pasar de unos modelos a otros) son los mismos que presentan dificultad en la solución de problemas y para entender los procesos.

Para investigar si los estudiantes han construido los conceptos, una sugerencia es dejarlos que los expliquen con sus palabras usando modelos concretos. Esta actividad debe ejecutarse para diagnosticar el estado de las ideas de cada uno de ellos por separado. Si el conocimiento se relaciona de cerca con el uso del material concreto este será de gran ayuda a la hora de realizar las tareas pertinentes. Se debe evitar dar instrucciones y sugerencias que los estudiantes sigan al pie de la letra y los induzca a encontrar soluciones sin mucho esfuerzo, para no convertir el trabajo en rutina e imitación que mate la creatividad. La actividad no será reflexiva si la actitud estudiantil se reduce a seguir instrucciones acerca de cómo obtener respuestas. La falta de reflexión no permite un crecimiento intelectual adecuado. Lo importante es que el maestro esté preparado para cualquier situación que ocurra en el aula.

Como conclusión se obtienen las siguientes apreciaciones:

1. Los alumnos construyen su propio conocimiento usando su específico cúmulo de ideas.

2. El conocimiento se produce de manera singular en cada estudiante.

3. El pensamiento reflexivo es el ingrediente más importante para un aprendizaje efectivo.

4. La enseñanza efectiva es la que tiene como epicentro al aprendiz. El énfasis es en el aprendizaje antes que en la enseñanza.

Para lograr lo anterior el maestro debe crear un ambiente matemático en el aula, proponer tareas razonables, crear grupos cooperativos, usar modelos y calculadoras para reforzar el aprendizaje, invitar a los estudiantes a manifestar sus ideas oralmente o por escrito, pedir justificación a las respuestas, y quizá lo más importante, escuchar con atención.

En un ambiente apropiado nadie es observador pasivo. El estudiante se siente cómodo expresando sus ideas, compartiendo puntos de vista, disintiendo sin ofender. El maestro no debe decir a sus estudiantes cómo pensar o cuáles hábitos desarrollar, pues son procesos que se dan con el tiempo en un ambiente donde pensar se tiene como norma. Crear un ambiente donde el estudiante tenga la libertad de expresar abiertamente sus ideas y refutar es una labor que el maestro debe asumir como prioritaria. En lo referente a los problemas propuestos, estos pueden ser de cualquier naturaleza, desde aquellos que involucren cómputos, hasta los que propongan situaciones que lleven al planteamiento de nuevas ideas. Un punto de vista para recordar es que desde el ángulo constructivista los problemas forman parte del aprendizaje y no son meras aplicaciones al final de cada etapa. En la solución de los problemas debe tenerse presente que su finalidad es la reflexión y el desarrollo de nuevas ideas por parte de la población estudiantil.

Distribuir a los estudiantes en grupos de dos, tres o cuatro es una estrategia para propiciar la discusión y la interacción. Los grupos de dos son ideales porque propician una mejor participación.

Por otra parte, permita el uso de calculadoras para facilitar cómputos tediosos o como ayuda en un proceso, porque no se trata de dar la espalda a la tecnología sino hacer uso de ella en forma equilibrada.

Las exposiciones orales, los trabajos escritos y la justificación de las respuestas sirven para obligar al estudiante a ser reflexivos y mejorar la autoestima pero principalmente incrementar la capacidad de comunicación a través del mejoramiento de las habilidades lingüísticas.

Si al estudiante se le estimula a responder, emitir conceptos, ser crítico o defender sus puntos de vista es forzado a escuchar y a cambiar sus esquemas cuando está errado; de esta forma, se le facilita la acción mental de acomodación.

Finalmente, si el aprendizaje está centrado en quien aprende, escuchar y valorar el pensamiento estudiantil sin imponer los puntos de vista de quien enseña; estimula el pensamiento de la colectividad y refuerza las conexiones internas; esto es, se facilita el entendimiento.

El educador debe procesar las respuestas incompletas; por ejemplo:

Alejandro, amplíame tu punto de vista.

Andrea, ¿qué puedes agregar a lo expresado por Alejandro?

Jaime, enuncia otro ejemplo.

¿Qué piensas acerca de eso Tania?

Paula, ¿estás de acuerdo con Tania?

Escuchar atentamente requiere valorar en toda su extensión las respues-

tas. En un ambiente matemático no se trata de ser demócratas imponiendo el pensamiento de la mayoría; se debe actuar en función de encontrar la verdad, es decir, explicar objetivamente la realidad con términos matemáticos.

1.7. Algunos ejemplos para fijar ideas

Para consolidar algunas ideas acerca de la construcción del conocimiento matemático estudiemos algunos ejemplos.

Primero. Partiendo del siguiente listado de números:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25,$$

conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Qué número sigue después del 25?
2. ¿Si se prolonga la escritura podrá encontrar un número par?
3. ¿Qué número ocupa el vigésimo octavo lugar?
4. ¿Cuánto tiempo necesitará para recitar de memoria la lista anterior?
5. ¿Durante cuántos días será capaz de recordar el listado anterior?

Si de recordar se trata, quizá la mejor opción es usar un proceso nemotécnico como dividirlos en grupos pequeños, lo que le permitirá recordarlos algunas horas o en el mejor de los casos días; pero este procedimiento no es suficiente para responder las tres primeras preguntas.

El secreto para responder correctamente todas las preguntas consiste en encontrar una relación entre cada uno de ellos. En efecto dicha relación está dada en los términos de «tomar el lugar que ocupa cada número, multiplicarlo por dos y agregarle la unidad». Con esta relación se puede afirmar que el lugar vigésimo octavo estará ocupado por el 57, después del 25 sigue el 27 y ningún número de la lista puede ser par.

La clave del éxito consiste en construir la relación, pero esta no puede ser percibida solo por los sentidos, se necesitan los conocimientos previos de duplicar y agregar la unidad, pero además la mente debe estar predispuesta y tener confianza en lo que está haciendo; esto es, creer en las propias habilidades.

La anterior situación es aplicable al proceso del aprendizaje de la multiplicación; por ejemplo, multiplicar por tres significa triplicar.

Con esta visión, 3×5 no es otra cosa que $5 + 5 + 5$, esto es, tres veces cinco. De allí la importancia de construir las tablas de multiplicar en lugar del tedioso proceso de memorización sin sentido, usado por algunos maestros para torturar la mente infantil.

En un contexto más avanzado la tercera pregunta equivale a plantear el problema típico del álgebra:

Si al duplo de la edad de Rebeca le sumamos la unidad, el resultado es igual a 57 años. Hallar la edad de Rebeca.

Examinemos un segundo ejemplo. Se propone el siguiente ejercicio:

Cinco niños tienen cuatro cajas de bolitas de cristal y desean repartirlas por partes iguales. Cada caja contiene treinta bolas y se desea saber cuántas le toca a cada uno.

Entre las variadas soluciones, consecuencia de la libertad de acción permitida al estudiante, mencionemos tres que por su creatividad merecen especial atención.

La primera y la segunda están expresadas en los siguientes términos:

$$\begin{array}{c} 10 \times 5 = 50 \\ 10 \times 5 = 50 \\ \underline{4 \times 5 = 20} \\ 24 \times 5 = 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 5 \times 10 = 50 \\ 5 \times 10 = 50 \\ \underline{5 \times 4 = 20} \\ 5 \times 24 = 120 \end{array}$$

La tercera es una resta reiterada e incluye una tabla donde se ubican los resultados parciales.

$$\begin{aligned} 120 - 50 &= 70 \\ 70 - 50 &= 20 \\ 20 - 20 &= 0 \end{aligned}$$

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	Total
10	10	10	10	10	50
10	10	10	10	10	50
4	4	4	4	4	20
24	24	24	24	24	120

Si usted está pensando que el método correcto para solucionar el problema consiste en multiplicar 30 por 4 y obtener 120 y después dividir por 5 para tener como respuesta 24, veamos cuál fue la interpretación de cada estudiante.

El primero plantea la solución consistente en encontrar cuántos grupos de 5 se pueden formar con 120 elementos y la repuesta es 24.

El segundo plantea la solución al problema de saber cuántos elementos debe tener cada grupo si con 120 elementos se desean formar 5 grupos, la respuesta es que cada grupo debe tener 24.

El tercero plantea el mismo criterio que el segundo, pero difiere en la ejecución de las operaciones, este es quien más se acerca al concepto de división.

La conclusión es que los tres interpretaron correctamente el ejercicio desde dos puntos de vista aparentemente diferentes, mostrando madurez, confianza, autoestima y satisfacción por el trabajo realizado.

Como tercer ejemplo, consideremos un estudiante a quien se le ha instruido en la ejecución de restas, «prestando 1 a la cifra de la izquierda». La operación la realizó así:

$$\begin{array}{rrrr} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 14} \\ & 8 & 0 & 4 \\ - & 2 & 3 & 5 \\ \hline & 4 & 7 & 9 \end{array}$$

14 menos 5 es 9
10 menos 3 es 7
6 menos 2 es 4

El niño, al enfrentarse a una situación con la que no estaba totalmente familiarizado, como a 0 no podía prestarle, decidió prestar 2 al 8 y repartirlo entre 0 y 4. A 8 lo convirtió en 6, a 0 en 10 y a 4 en 14.

Analizando la situación, se observa que es posible que el estudiante usara las herramientas mentales preestablecidas. El error radicó en no hilvanar correctamente la relación entre los conceptos de desarrollo polinómico de la escritura de los números y la reagrupación de las cifras.

Tal vez el estudiante tenía claridad acerca de estos conceptos pero falló al no concatenarlos. No importa cuán ejercitado estuviera con relación a la escritura polinómica, estas ideas las manejaba en forma mecánica.

Este último ejemplo ilustra cómo es posible enseñar un concepto relativo a un procedimiento (algoritmo), pero fallar al ayudar a concatenar el concepto con el algoritmo. Desafortunadamente es muy común encontrar estudiantes enfrentados a la solución de problemas con la ayuda de un procedimiento y muy poco conocimiento del concepto involucrado.

1.8. La formulación de problemas en el aprendizaje de la matemática

El constructivismo sostiene que el estudiante aprende haciendo, tratando de dar sentido a las situaciones que no le son familiares (acomodación), probando nuevas ideas. Los problemas y preguntas son oportunidades para aprender, no para verificar lo expuesto por el maestro. La mayor implicación de esta corriente pedagógica es que la mejor forma de aprender matemática es formulando y resolviendo problemas. De acuerdo con el diccionario *Pequeño Larousse Ilustrado*, un problema es una cuestión que se trata de resolver por medio de procedimientos científicos. // Proposición dirigida a obtener un resultado conociendo ciertos datos. // Cosa difícil de explicar, asunto susceptible de varias soluciones. El *Oxford English Dictionary*, entre otras cosas expresa: *A question that exercises the mind*, esto es, una pregunta que ejercita la mente.

Charles and Lester, citados por John Van de Walle, lo definen como:

1. Una situación o tarea tal que la persona que la enfrenta necesita una solución.
2. No posee un procedimiento inmediato disponible para hallar la solución.
3. Debe hacer intentos para hallar dicha solución.

George Pólya en 1945 publicó el libro *How to solve it* (Cómo resolverlo) donde sugiere por primera vez la heurística para resolver problemas, condensada en cuatro pasos:

1. Entender el problema.
2. Confeccionar una estrategia de solución.
3. Desarrollar el problema.

4. Volver al problema, la respuesta y el método de solución.

Lo primero que se debe hacer es tener claridad de lo que se conoce acerca del problema y el proceso a seguir, diferenciar entre la información importante y la innecesaria o superficial, tener claridad de lo preguntado, reformular la información y pensar en situaciones similares que puedan contribuir a la solución. La forma de atacar un problema puede variar con el individuo pero existen conceptos matemáticos y procedimientos generales que se pueden sugerir, por ejemplo, plantear una versión simplificada o uno similar ya resuelto.

Un problema no debe ser considerado resuelto cuando se halle una solución. Se debe mirar la posibilidad de otras, si la solución se ajusta a todas las condiciones o si por el contrario presenta contradicciones con alguna de ellas o con los datos, si la lógica y los cálculos son correctos. En cuanto al proceso se debe ver si hay maneras más fáciles de llegar a una respuesta. Finalmente se debe considerar lo que se ha aprendido del problema mismo.

El maestro es el responsable de crear una atmósfera agradable de trabajo propiciando acciones antes, en y después de planteada la situación problemática. Debe estar seguro que el educando haya entendido la tarea. Si presenta un nuevo concepto o es relativamente difícil, una explicación preliminar puede encaminar el entendimiento. Hacer preguntas para aclarar, establecer expectativas, comenzar con una versión simple, ayudar a confeccionar un plan, interactuar apropiadamente y usar los elogios con mesura. Después de encontrada la solución establecer un segundo modelo, orientar la discusión. Recordar que los intereses y las habilidades varían de persona a persona.

Haciendo eco a lo expresado anteriormente, los problemas se deben usar (más no exclusivamente) para iniciar el aprendizaje. Por ejemplo, si se desea introducir la multiplicación se puede plantear el siguiente ejercicio:

¿Si de tu casa a la escuela caminas ocho cuadras, cuántas recorrerás de ida y regreso?

Más tarde preguntar:

¿Cuántas recorrerás si lo haces dos veces por día?

Para estimular la atención proponga problemas del siguiente tipo, donde se agregan datos innecesarios o se da información insuficiente:

¿Si cada confite de chocolate cuesta 50 pesos y cada uno de leche cuesta 60, cuánto cuestan 6 confites de chocolate?

Un excelente método consiste en que los estudiantes redacten sus propios

ejercicios extraidos de situaciones de la cotidianidad. Escoja los mejores y propóngalos como ejemplos. Bajo estas características el texto deja de ser parte importante de la enseñanza, pero se puede utilizar para otros menesteres.

La resta se puede introducir a través de la diferencia, con un ejercicio como el siguiente:

¿Si Jaime vive a cinco cuadras de la escuela y Glenna vive a ocho, cuántas cuadras de más camina Glenna?

Los problemas que se enuncian a continuación, expresan mejor el concepto de diferencia:

Tome los números 9, 25, 16.

1. Ordénelos de mayor a menor.

2. ¿Es posible escribir uno de ellos como la suma de los otros dos?

3. De ser posible, ¿de cuántas maneras puede hacerlo?

Al final se deben obtener las siguientes respuestas:

1. 25, 16, 9

2. Sí es posible

3. $25 = 16 + 9$

4. $25 = 9 + 16$

Tome los números 17 y 21.

1. Ordénelos de mayor a menor.

2. Reescriba el número 21 en dos sumandos, de manera que 17 sea uno de ellos.

Las respuestas deben ser:

1. 21, 17

2. $21 = 17 + 4$

3. $21 = 4 + 17$

Haciendo énfasis en la respuesta 2, pregunte cuánto le hace falta a 17 para igualar a 21, o sea, $21 - 17 = 4$. La respuesta 3 debe inducir a la diferencia entre 21 y 4, es decir, $21-4 = 17$. En el caso de la diferencia no es pertinente aplicar la propiedad conmutativa.

En general: Si $x = y + z$ es porque $x - y = z$.

Dependiendo del grado, estos ejercicios es poaible darles solución usando modelos concretos o transformarlos en otros que impliquen un nivel de raciocinio más complejo. En octavo grado la diferencia "$2x - (x - 3)$" conduce al análisis del siguiente ejercicio.

Paula posee tres muñecas menos que Andrea. Si al doble de las que posee Andrea le restamos las de Paula se obtienen diez muñecas. ¿Cuántas muñecas posee cada niña? ¿Cuál debe ser la mínima diferencia para que el problema pueda tener solución?

La respuesta se da en los siguientes términos:

Suponiendo que x es una cantidad positiva, $2x$ es necesariamente mayor que $(x - 3)$; esto indica que a $(x - 3)$ le faltan $(x + 3)$ para igualar a $2x$. Por tanto esta diferencia se puede expresar mediante la igualdad.

$$2x - (x - 3) = x + 3$$

Esta gualdad conduce a plantear la siguiente ecuación:

$$x + 3 = 10$$

La solución conduce a decir que Andrea posee siete muñecas y Paula cuatro.

En cuanto a la segunda respuesta, el problema se debe plantear en los siguientes términos: Paula posee tres muñecas menos que Andrea. Si al doble de las que posee Andrea le restamos las de Paula se obtienen siete muñecas. ¿Cuántas muñecas posee cada niña?

En noveno grado, una versión de esta misma diferencia es posible enunciarla así: La diferencia entre dos números es de tres unidades. Si al doble del mayor le restamos el menor el resultado es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Hallar los números.

Finalmente en décimo grado un enunciado equivalente es: La diferencia de las medidas de dos ángulos es de tres grados. Si al doble de la medida del mayor le restamos la del menor el resultado es $\frac{\pi}{4}$. Hallar la medida de cada uno.

Un problema más complejo para estudiar el concepto de producto es:

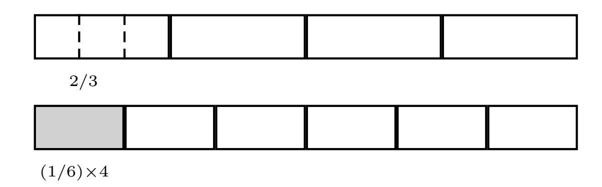
Escribir tres preguntas relacionadas con el siguiente dibujo, donde cada X representa una cuadra caminada por el respectivo estudiante a la escuela.

Glenna	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Milton	X	X	X	X	X	X	X	X				
Tania	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
Jaime	X	X	X	X	X							

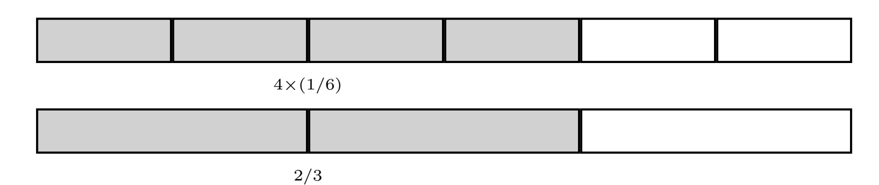
Una cuidadosa observación del gráfico permite ver que por cada 12 cuadras que camina Glenna, Milton recorre 8; esto es, las dos terceras partes. Esta relación conduce a proponer preguntas del siguiente tenor: ¿Si Glenna caminara 15 cuadras, cuántas debería caminar Milton?

El siguiente dibujo es un buen modelo para comprobar que $\frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{3}$. En otros términos, que la sexta parte de cuatro son los dos tercios de la unidad.

Los rectángulos superior e inferior representan cada uno cuatro unidades. El superior está dividido en cuatro partes iguales y el inferior está dividido en seis, por tanto el área sombreada representa la sexta parte de cuatro. Por su parte el área punteada del primer rectángulo superior representa los dos tercios. Compare dichas áreas.



Por su parte, cuatro veces un sexto, esto es, $4 \times \frac{1}{6}$ se puede representar así:



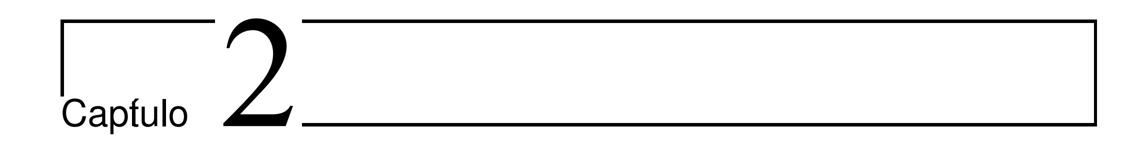
Del modelo se infiere que: $4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

En este caso cada uno de los rectángulos, superior e inferior, representan la unidad. El área gris del superior corresponde a $4 \times \frac{1}{6}$ y la inferior no es otra cosa que $\frac{2}{3}$. Con este ejercicio, además de mostrar la importancia de la correcta selección del modelo, se enfatiza en la carga sicológica que conlleva la comprensión de la propiedad conmutativa del producto.

Concluyendo, es pertinente afirmar que la matemática formal se basa en un sistema de axiomas supuestamente verdaderos que no presentan contradicciones y que no dependen necesariamente de la experiencia sensible.

A partir de ellos se establecen definiciones y se enuncian propiedades que deben ser demostradas usando el método deductivo. Este proceso permite afinar la teoría con el apoyo del simbolismo convencional y las leyes de la lógica matemática.

El aprendizaje de la matemática en la escuela se basa en el conocimiento correcto del significado de las operaciones fundamentales con el ánimo de solucionar con ellas problemas de la vida cotidiana u otros simulados. El material concreto permite que el aprendizaje esté de acuerdo con las estructuras propias de la mente infantil.



LOS ESTÁNDARES DE VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE

En la escuela tradicional el maestro representa la fuente indiscutible del conocimiento. Las clases generalmente comienzan con un repaso de lo estudiado el día anterior y la revisión de algún trabajo realizado en casa, continuando con la siguiente página de un texto seleccionado de acuerdo con los intereses del educador. La instrucción consiste en mostrar al alumno la manera de resolver los problemas propuestos en el texto y, si las dificultades persisten, volver a explicar la forma de realizar el trabajo. Se insiste en la obtención de respuestas que son examinadas por el maestro, quien decide si son correctas. Las tareas consisten en la ejecución de cómputos tediosos basados en reglas previamente enunciadas.

Desde este enfoque, lo usual es valorar el aprendizaje a través de tareas que penalizan lo que no se ha asimilado, dejando de lado el aprendizaje adquirido; luego se traduce, en términos de evaluación, a una nota aprobatoria, o no, de acuerdo con la cantidad de conocimiento demostrado.

Los estándares de valoración del aprendizaje propenden por la eliminación de tareas que auscultan el conocimiento de hechos específicos y habilidades aisladas; en cambio realizan un proceso de recolección de evidencias tendientes a desarrollar el potencial matemático, la habilidad para usar el conocimiento, realizar inferencias y extrapolar ideas. La valoración sirve para evaluar tanto el aprendizaje como los programas, haciendo énfasis en la recopilación de información.

Entre los aspectos que caracterizan a los estándares de valoración se en-

cuentran:

1. El aprendizaje de la matemática que todo estudiante debe adquirir para realizar una tarea específica.

2. El refuerzo del aprendizaje.

3. La promoción equitativa.

4. Es un proceso abierto.

5. El desarrollo de inferencias válidas con respecto al aprendizaje de la matemática.

6. Es un proceso coherente.

Los estándares de valoración del aprendizaje deben estar interrelacionados con los cuatro aspectos siguientes: solución de problemas centrado en el estudiante, comunicación, raciocinio y conexiones matemáticas. Recomiendan como su principal objetivo incrementar realizaciones, guiar y reforzar el aprendizaje y conocer lo valorado. En este sentido se establece la acomodación en circularidad o retroalimentación.

El reto planteado en la equidad implica la ejecución de tareas flexibles que permitan el cumplimiento de las metas planteadas y dejar a los estudiantes saber lo que se espera de ellos y cómo deben demostrar su conocimiento. Por otra parte sirven para guiar al maestro para proveer una constante fuente de información que le permita realizar inferencias válidas y tomar decisiones durante el desarrollo del aprendizaje y no al final. Se deben fundamentar en la forma de hacer matemática, esto es, comunicación, razonamiento, justificación de resultados, comprobación de hipótesis y encontrar patrones.

Un proceso instructivo centrado en el estudiante consta de tres componentes: una situación o problema presentada a la consideración del grupo, brindar la oportunidad de trabajar el problema y propiciar el análisis del trabajo realizado. La actividad matemática no se debe reducir solo a encontrar respuestas correctas. Es, se puede decir, imposible confeccionar una prueba que mida objetivamente el trabajo estudiantil o el proceso individual de aprendizaje teniendo en cuenta solamente la solución de un problema, sin tener presente los criterios esbozados anteriormente.

En concordancia con las prácticas instruccionales, la valoración debe tener en cuenta los materiales usados; por ejemplo, si el uso de calculadoras u otro

material concreto formaron parte del proceso de aprendizaje, también deben serlo del proceso de valoración. En este sentido debe haber coherencia entre estas dos fases.

Se debe establecer una distinción importante entre la valoración del conocimiento y la evaluación. La valoración consiste en la recopilación de información, mientras que la evaluación es el proceso de medir la cantidad, o la asignación de un valor al aprendizaje con base en un cuidadoso análisis y arbitramiento. La evaluación indica el criterio que tiene el maestro con respecto al estudiante en relación con el aprendizaje.

2.1. Los indicadores de valoración del aprendizaje

The National Council of Teachers of Mathematics, institución americana cuyo nombre en español corresponde a “Concejo Nacional de Maestros de Matemáticas”, define el potencial matemático como las habilidades individuales para explorar, proponer hipótesis, comunicar el pensamiento y razonar lógicamente usando efectivamente diferentes métodos matemáticos en la solución de problemas no rutinarios. (NCTM, 1995, 5).

Para ayudar a desarrollar este potencial se deben establecer algunos criterios denominados indicadores de valoración del aprendizaje, pero teniendo en cuenta que estos indicadores son solo una guía con propósitos evaluativos y, como tales, omiten algunos tópicos que el maestro podría considerar de acuerdo con el comportamiento matemático en el aula. Estos indicadores se pueden considerar de acuerdo con los siguientes aspectos:

1. Solución de problemas.

2. Raciocinio lógico.

3. Habilidad para comunicar el pensamiento matemático.

4. Integración del conocimiento.

De acuerdo con la solución de problemas cabe redactar los siguientes indicadores:

1. Entiende las características del problema, esto es, entiende la pregunta y es capaz de redactarlo con sus propias palabras.

2. Selecciona una estrategia apropiada.

3. Resuelve el problema de una manera eficaz.

4. Verifica y analiza las respuestas.

Con respecto al raciocinio son adecuados los siguientes indicadores:

1. Propone hipótesis observando los datos (razonamiento inductivo).

2. Valida las hipótesis a través de verificaciones lógicas o las invalida mediante el uso de ejemplos (razonamiento deductivo).

Con respecto a la habilidad para comunicar, se pueden establecer:

1. Usa apropiadamente la notación y terminología matemática.

2. Explica adecuadamente sus razones.

3. Confecciona representaciones matemáticas (modelos, gráficos, diagramas).

Con respecto a la integración es correcto decir:

1. Evalúa las soluciones desde diferentes perspectivas.

2. Realiza analogías creativas.

3. Realiza conexiones entre los diferentes conceptos.

4. Realiza conexiones entre la matemática, otras disciplinas y la cotidianidad.

Como se ha establecido, la valoración y las estrategias deben ser coherentes. Si la práctica en el salón está fundamentada en la solución de problemas, pero los criterios de valoración se basan en la obtención de respuestas correctas, o viceversa, la instrucción está condenada al fracaso. Desafortunadamente la brecha entre aprendizaje y las tareas de valoración del mismo se debe a la costumbre de confundir esta última con la evaluación, lo que lleva a preparar tareas de evaluación equivocadas. Recuerde que los trabajos de valoración no deben ser repeticiones de experiencias anteriores que induzcan al estudiante a imitar procedimientos de ejercicios previamente resueltos, los trabajos de valoración deben ser exactamente tareas de aprendizaje.

A continuación se presentan ejemplos de ejercicios de valoración del aprendizaje. Son algunas ideas para tener en cuenta; el resto depende del ingenio de cada maestro. Al redactarlos es necesario considerar lo que puede suceder cuando los estudiantes aborden los problemas propuestos y las conclusiones que se puedan derivar de un análisis posterior. Las sugerencias que se presentan no son las respuestas que el docente debe esperar, estas se dan solo como ilustración.

Tenga en cuenta lo siguiente:

1. Cuál es el concepto inicial involucrado en el ejercicio.
2. Qué proceso se ha seguido en la solución.
3. Qué tipo de raciocinio se utilizó.
4. La relación que tiene con otras disciplinas u otros conceptos de la matemática.
5. Alcance del ejercicio.
6. Rango de estudiantes que pueden abordarlo con éxito.
7. Posibilidad de realizar una discusión previa.

El siguiente es un ejercicio que involucra el concepto de producto:

Si cada naranja cuesta 50 pesos, ¿cuánto costarán cuatro naranjas?

Alejandro asegura que el problema se resuelve mediante una multiplicación y escribe:

$$50 \times 4 = 200$$

Andrea presenta la siguiente solución: Si cada una cuesta 50 pesos, realizo una suma para saber cuánto cuestan las cuatro.

$$50 + 50 + 50 + 50 = 200$$

Como ambas respuestas son correctas decida quién expresa mejor el concepto y explique por qué. Realice un dibujo que sustente su apreciación.

Observe que este tipo de tareas va más allá de la simple realización del producto $4 \times 50 = 200$ que en últimas es la solución al problema inicial. Con este ejercicio se debe concluir que Andrea expresa mejor la idea, puesto que 4×50 no es otra cosa que tomar a 50 como sumando cuatro veces, mientras

que 50×4 significa tomar a 4 cincuenta veces como sumando. En este caso la respuesta a pesar de ser la misma, 200 pesos, es lo menos importante en el desarrollo del ejercicio.

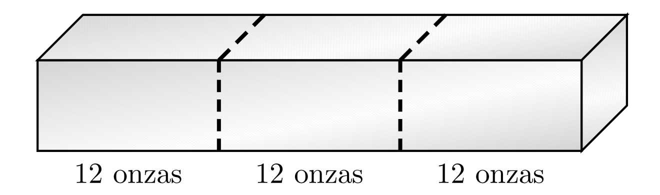
Los cuatro primeros numerales descritos arriba saltan a la vista en este ejemplo.

El siguiente ejercicio utiliza la relación que hay entre la libra y la onza, pero su objetivo principal es el concepto de fraccionario.

Un queso con forma de paralelepípedo rectangular pesa dos libras con cuatro onzas. ¿Qué parte de este queso representan $\frac{3}{4}$ de libra? ¿Cómo haría usted para cortar dicho pedazo? Explique su razonamiento y confeccione un dibujo que justifique la respuesta.

Una solución interesante planteada por alguien con suficientes conocimientos (debe haber otras) es posible que se presente en los siguientes términos:

La libra tiene 16 onzas, por tanto dos libras con 4 onzas son en total 36 onzas. Por otra parte $\frac{3}{4}$ de libra son 12 onzas y 12 es la tercera parte de 36. En conclusión $\frac{3}{4}$ de libra representan la tercera parte del queso. Esto quiere decir que con una cinta de medir se puede dividir en tres partes iguales y cortar una de estas.



El siguiente ejercicio está relacionado con conceptos que implican división.

Si realizamos la operación $17 \div 4$ se pueden obtener las siguientes respuestas:

1. $17 = 4 \times 4 + 1$, esto es, cuatro por cociente y uno por residuo.

2. $4\frac{1}{4}$

3. $4,25$

4. 425×10^{-2}

5. $425\,\%$

Redacte un problema donde cada una de las respuestas 1 a 4 representen mejor la situación. ¿Por qué la quinta respuesta es la menos opcionada?

La respuesta al interrogante es que 425 por ciento es un porcentaje demasiado elevado, tal vez de rara ocurrencia en problemas prácticos.

El ejercicio que a continuación se describe tiene relación con el algoritmo de la resta.

El complemento de un número es la diferencia entre dicho número y la mayor potencia de diez más cercana a él. Por ejemplo, el complemento de 3 es 7, el de 87 es 13 y el de 164 es 836. Por otra parte, restar dos números es lo mismo que sumar el minuendo con el complemento del sustraendo (quitándole al resultado la primera cifra de la izquierda o restándole 1 a esta, de ser necesario). Por ejemplo:

$$87 - 3 \equiv 87 + 7 = 94$$

Restando 1 al 9 la respuesta es 84.

$$95 - 87 \equiv 95 + 13 = 108$$

Eliminando el 1 la respuesta es 8.

$$437 - 164 \equiv 437 + 836 = 1273$$

Eliminando el 1 la respuesta es 273.

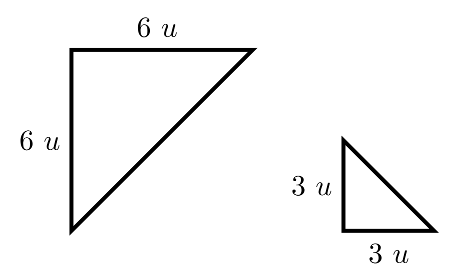
Justifique este procedimiento para restar.

El siguiente problema está planteado para desarrollar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

Si usted no conoce la tabla de multiplicar del 8, ¿cómo haría para calcular el producto 6×48? ¿De cuántas maneras se puede resolver el ejercicio? ¿Cuál prefiere usted?

Con el ejercicio que sigue se pueden evaluar entre otras las ideas de semejanza, perpendicularidad, área.

Exprese el mayor número posible de ideas con respecto a las figuras siguientes.



El ejercicio que se describe a continuación es obtenido de las vivencias cotidianas.

Vaya a la tienda y pregunte al tendero cómo hace para saber cuánto dinero ha recaudado por ventas durante el día, incluyendo la forma de contarlo. Redacte un problema relacionado con la experiencia anterior.

La siguiente tarea puede llevar al planteamiento de problemas con soluciones diferentes.

Tome la ecuación $3x - 7y + 5 = 0$ y redacte un problema en cuya solución se use dicha ecuación.

Por otra parte, tomando como referencia la distribución de los números en la calculadora se puede construir el arreglo

$$\begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & & \end{array}$$

Se denomina "Conformado Por Vecinos" o CPV a un número de dos dígitos obtenido al presionar dos teclas adyacentes en forma horizontal, vertical o en diagonal, cualquiera sea la dirección. Por ejemplo $45, 21, 75, 48, 84$ son números conformados por vecinos, mientras que 79 no lo es.

El ejercicio consiste en hallar dos diferentes parejas de CPV tales que su suma sea igual. Por ejemplo $45 + 78 = 75 + 48 = 123$. Una vez establecida la idea de parejas de CPV cuya suma sea igual, se trata de enunciar una relación entre dichos pares. Cuando esta relación sea enunciada, el reto planteado es demostrar su veracidad desde el punto de vista matemático.

La solución se puede plantear en los siguientes términos: Para que la suma de dos parejas de CPV sea igual es necesario que se conformen arreglos de cuatro dígitos adyacentes tanto horizontal como verticalmente. Por ejemplo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4 & 5 & & 5 & 6 & & 8 & 9 \\ 1 & 2 & & 2 & 3 & & 5 & 6 \end{array}$$

Para estos ejemplos se obtienen, entre otras, igualdades como:

$$12 + 45 = 42 + 15 = 57$$

$$52 + 63 = 62 + 53 = 115$$

$$56 + 98 = 96 + 58 = 154$$

En general, para que la suma de dos parejas de CPV sea igual, los arreglos anteriores deben tener la forma:

$$\begin{array}{cc} n+3 & n+4 \\ n & n+1 \end{array}$$

Considerando que el CPV conformado con los adyacentes n, $n+1$ es igual a $[10n + (n+1)]$ y el conformado con $n+3$, $n+4$ es $[10(n+3) + (n+4)]$; al tomar la suma se obtiene la igualdad:

$$[10n + (n+1)] + [10(n+3) + (n+4)] = [10(2n+3) + (2n+5)]$$

Por otra parte, tomando los adyacentes diagonales n, $n+4$ se obtiene el CPV $[10n + (n+4)]$ y tomando $n+3$, $n+1$ se conforma $[10(n+3) + (n+1)]$, de cuya suma se tiene la igualdad:

$$[10(n+3) + (n+1)] + [10n + (n+4)] = [10(2n+3) + (2n+5)]$$

De las igualdades anteriores se concluye que la suma de estas dos diferentes parejas de CPV es idéntica.

Si se combinan los adyacentes verticales $n+3$, n y $n+4$, $n+1$ con los diagonales $n+4$, n y $n+3$, $n+1$; se obtiene la misma conclusión.

El anterior ejercicio es un caso particular de un hecho que se da de manera general para sumas de enteros de dos dígitos.

Tomando la suma de los enteros de dos dígitos $[10a + b]$ y $[10c + d]$ se puede escribir la siguiente igualdad:

$$[10a + b] + [10c + d] = [10c + b] + [10a + d]$$

El miembro de la derecha no es otra cosa que la suma de los enteros de dos dígitos: $[10c + b]$ y $[10a + d]$.

La conclusión es que si tenemos cuatro dígitos siempre es posible conformar con ellos dos parejas de enteros de dos cifras cuya suma sea igual, por ejemplo $74 + 36 = 34 + 76 = 110$.

2.2. La evaluación

La evaluación, mirada desde el punto de vista del aprendizaje de la matemática, no es una colección de ejercicios cuyas soluciones tengan que ver con la aplicación de algún algoritmo, aunque este tipo de problemas no deben descartarse por completo y pueden ser usados durante el proceso de adquisición del conocimiento.

En términos generales, la evaluación es un proceso continuo, amplio y multirreferencial destinada a la construcción significativa del conocimiento y vinculada con los procesos de aprendizaje y enseñanza. Debe reflejar lo expresado en las metas de aprendizaje y ser usada para determinar la comprensión de los conceptos y las relaciones entre ellos. Desde la perspectiva de la matemática debe ir más allá de la ejecución de un algoritmo y demostrar los fundamentos en que se apoya la solución de la tarea planteada.

La evaluación está concebida para proporcionar al docente información valiosa acerca del aprendizaje, antes que limitarse a encontrar respuestas correctas.

Un pensamiento de amplia aceptación entre los maestros es considerar la evaluación como la medición del aprendizaje con caracter de decisión inapelable, cuyos fines son la acreditación y la certificación. Una considerable mayoría de docentes se inclinan por una postura psicométrica de la evaluación por el acentuado vínculo con la medición cuantitativa del aprendizaje. Tal criterio tiene su máxima expresión en el pronunciado uso de las pruebas objetivas como principal instrumento evaluador. Los docentes que han incorporado a su práctica laboral estos principios suelen presentar resistencia a cualquier intento de modificar sus patrones, por lo que muestran rigidez y poca variedad en el uso de nuevos procedimientos.

Siguiendo los lineamientos, anteriores al evaluar tenga presente los siguientes aspectos:

1. Permitir el uso de calculadoras todo el tiempo, excepto cuando se trate de cómputos relativamente fáciles. Si el estudiante no tiene idea del procedimiento inmerso en un problema, la calculadora no le servirá de ayuda; en cambio su uso proporciona seguridad.

2. Promover el uso de material concreto y la confección de dibujos, cuando estas ayudas hayan hecho parte de la valoración del conocimiento.

3. Desarrollar una atmósfera agradable como parte de la predisposición

sicológica hacia el aprendizaje.

4. Evitar las preguntas que tienen una única respuesta correcta, ya sea un cálculo, selección múltiple o llenar espacios en blanco. Las preguntas de este tipo tienden a fragmentar y a no revelar la totalidad del conocimiento adquirido. La evaluación debe brindar la oportunidad de demostrar todo el conocimiento desarrollado. Debe ser usada para determinar el progreso, el entendimiento del proceso de la solución de problemas.

Los siguientes ejemplos sirven de orientación para la confección de preguntas:

1. Dados los productos: 259×32, y 240×35, escriba un producto cuya respuesta se encuentre entre las respuestas de los dos anteriores.

2. Para la diferencia: $56 - 25$, se escribe la siguiente igualdad:

$$56 = 25 + 31$$

   Con base en lo anterior, para cada una de las diferencias escritas a continuación escriba una suma que nos ayude a pensar en la respuesta de dicha diferencia

   $324 - 168$
   $402 - 324$

3. Diga cuál de las dos igualdades escritas a continuación expresa mejor la diferencia $29 - 13$ y explique por qué.

   $29 = 13 + 16$
   $29 = 16 + 13$

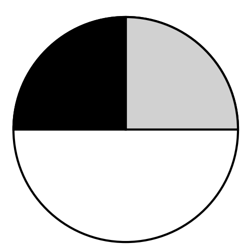
4. Usando la ecuación: $2x - y + 5 = 0$, redacte dos problemas que tengan soluciones diferentes.

5. Diga si los dos problemas siguientes tienen el mismo significado y justifique su respuesta.

   Luis tiene 18 caramelos de chocolate y Andrés tiene 23, ¿cuántos más posee Andrés que Luis?

   Luis tiene 18 caramelos de chocolate y Andrés tiene 23, ¿cuántos menos posee Luis que Andrés?

6. Encuentre dos fracciones equivalentes representadas en el siguiente dibujo.



2.3. Las pruebas objetivas

Una prueba objetiva se puede definir como un conjunto de preguntas de enunciados breves seguidos por una o más opciones de respuestas, de donde el sujeto evaluado debe elegir una de las opciones en vez de construir él mismo la respuesta.

El carácter de objetividad procede de que la solución correcta está determinada de modo inequívoco, por lo que se elimina la subjetividad del evaluador.

Al decir de sus defensores, son instrumentos de evaluación de procesos y resultados del aprendizaje y formación de los alumnos que se utilizan al servicio del desarrollo de su preparación educativa en general. Afirman que dichos instrumentos constituyen reactivos en los que los evaluados ponen de manifiesto sus conocimientos a nivel de formación, a través de sus respuestas.

De las pruebas objetivas se espera que cumplan con la función que debe exigirse a todo instrumento evaluativo; esto significa que deben facilitar al profesor información valiosa sobre la calidad del aprendizaje, sirviendo además de retroalimentador de la propia práctica educativa.

Un hecho para tener en cuenta es que por las características que las configuran, estas pruebas no facilitan procesos tan formativos como la elaboración de las respuestas a través del raciocinio crítico y la libertad de expresión o el pensamiento controversial. Tampco proveen información inmediata sobre la calidad del aprendizaje.

Partimos del criterio de que las pruebas objetivas, por su elaboración específica, no pueden incluirse entre los instrumentos de valoración del aprendizaje, al menos de la matemática, porque:

1. Dificultan el proceso de recolección de evidencias tendientes a desarrollar el potencial matemático.

2. No permiten extrapolar ideas.
3. No ayudan a mejorar la comunicación.
4. Con ellas es difícil encontrar una solución original a un problema explicando cada paso.
5. Mal elaboradas, son pruebas de "adivinación múltiple" o pueden sugerir respuestas.
6. Facilitan la copia.
7. Al responder al azar distorsiona los resultados.
8. Evalúan conocimientos memorísticos.
9. El hecho de elegir la mejor opción de respuesta refuerza más el pensamiento selectivo antes que los procesos mentales dirigidos a la construcción del conocimiento.

Analicemos el siguiente ejemplo:

Las longitudes de los lados de un rectángulo inscrito en un círculo de 5 centímetros de diámetro, si la diferencia entre ellos es igual a 1 centímetro son:

A) 1 y 2 centímetros.
B) 2 y 3 centímetros.
C) 3 y 4 centímetros.
D) 4 y 5 centímetros.

Para dar respuesta a este problema basta con aplicar la relación de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 25$$

La solución, por simple inspección, corresponde al distractor C.

La solución de este ejercicio paso a paso incluye:

1. Plantear la ecuación:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$

2. Efectuar las operaciones correspondientes para llegar a la ecuación equivalente:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

3. Usando cualquiera de los métodos, encontrar que las raíces son 3 y -4.

4. Desechando la raíz negativa se concluye que los lados del rectángulo deben ser 3 y 4 centímetros.

Por otra parte, la ecuación equivalente:

$$x(x+1) = 12$$

teniendo en cuenta que $12 = 3 \times 4$, permite encontrar por simple deducción la solución: $x = 3$.

Note que para encontrar la respuesta se extrapolaron ideas al convertir la relación pitagórica en una ecuación de segundo grado con una incógnita. Se debe demostrar habilidad para simplificar polinomios mediante procesos aritméticos y tener experiencia en la solución de ecuaciones de segundo grado. Se realiza un razonamiento lógico al desechar la solución negativa y se vuelve al problema para verificar la respuesta.

Por su parte, las pruebas objetivas son buenos instrumentos cuando de calificar se trata porque:

1. Permiten incluir mayor número de tópicos, propiciando así que se pueda abarcar todo el programa deseado.

2. Evitan la imprecisión, al pedir exactitud en las respuestas.

3. El alumno se concreta exclusivamente en el contenido de la materia y no en aspectos como la redacción y ortografía, a pesar del detrimento de las habilidades de comunicación.

4. Evitan el juicio subjetivo del maestro al calificar y facilitan la corrección.

5. Bien elaboradas ponen en juego gran número de capacidades del alumno.

6. Admiten la aplicación de múltiples análisis estadísticos cuyos resultados posibilitan las tareas de tomas de decisiones posteriores.

Si usted tiene presente que las pruebas objetivas no son la única o mejor forma de evaluar la calidad del conocimiento puede perfectamente valerse de ellas siempre y cuando las utilice como complemento de otros instrumentos de evaluación y no con la finalidad de mejorar resultados.

Una prueba objetiva debe tener las siguientes características:

- Validez: debe corresponder exactamente a los objetivos del aprendizaje que se pretenden evaluar, según la conducta principal que estos enuncian.

- Objetividad: cada distractor debe estar claramente redactado y solo uno de ellos debe ser correcto.

- Confiabilidad: su precisión y claridad debe hacerla superar la posible inestabilidad sicológica de los examinados, de tal manera que si se repite en el mismo grupo, los resultados tengan relación entre sí.

- Aplicabilidad: debe elaborarse con sencillez en su estructura, de manera que resulte fácil de aplicar, contestar, corregir y valorar.

Defina con exactitud qué información desea obtener por medio de su aplicación, elabore distractores que correspondan exactamente a la información que se desea obtener, evitando completarlos de cualquier manera. Se deben además graduar las dificultades; estas deben corresponder a la capacidad que el alumno haya alcanzado en la etapa en que se encuentra. También debe ser representativa de todo el contenido de aprendizaje.

2.4. La calificación

Una amplia mayoría de maestros piensa que tienen un real conocimiento del nivel de aprendizaje de sus estudiantes, de cómo reaccionan ante situaciones específicas, de su forma de pensar, de sus creencias y de sus metas. Confían en la eficacia de las calificaciones asignadas y las usan como escala de medición del conocimiento, de tal manera que se considera al estudiante como mejor o peor de acuerdo con el lugar que ocupe la nota en la escala numérica. Como consecuencia, la valoración del aprendizaje se reduce a una estadística fría, divorciada de la realidad académica. Este tipo de actitud forma parte de la rutina de nuestras escuelas y tiene tanto arraigo que hace difícil abandonarla.

A pesar de lo anterior, es bien cierta la necesidad de recopilar información importante acerca del proceso de aprendizaje, del progreso en la solución de problemas, de las actitudes, creencias y metas de los estudiantes. Ignorar esta información en favor de una calificación, sea en la escala de uno a diez o en su equivalente en letras basada en la aplicación de una prueba escrita, es injusto con los estudiantes, padres de familia y hasta con los mismos maestros.

La calificación es una estadística usada para informar a otros el nivel de progreso alcanzado en un área particular de estudio. El grado de exactitud de la calificación es dependiente de la información que se ha usado al preparar la evaluación, del grado de profesionalismo del maestro y de los delineamientos planteados en la valoración del aprendizaje. De acuerdo con lo dicho, para asignar una calificación se debe tener en cuenta la información recopilada durante la valoración del aprendizaje, así como las metas planteadas, las actitudes y aptitudes. Asignar una nota sin tener en cuenta los anteriores criterios es un proceso subjetivo, no importa que se califique con tres decimales de aproximación. No olvide que se califica lo evaluado.

El uso efectivo de la información recopilada a través del proceso de aprendizaje y de otros métodos apropiados para dar una calificación, no impide reconocer que la toma de decisiones es tarea difícil e inevitable. Algunas decisiones son de carácter filosófico, otras requieren del acuerdo entre los educadores, pero todas dependen de los objetivos trazados.

Quedan algunas consideraciones que deben ser tenidas en cuenta:

- ¿Se debe considerar el progreso o solamente los resultados finales?
- ¿Deben ser calificados todos los estudiantes con el mismo rasero o se deben considerar ciertas habilidades como factores?
- ¿Se debe asignar mejor calificación a quien realice una tarea más difícil?
- ¿Se debe ser más elástico con los discapacitados? ¿Debe ser la elasticidad directamente proporcional al grado de la limitación?

2.5. Los estándares curriculares

De acuerdo con *The National Council of Teachers of Mathematics*, los estándares curriculares establecen una visión de lo que significa ser matemáticamente "ilustrado" en la sociedad de los tiempos modernos. Proveen de la filosofía de la enseñanza de la matemática y establecen directrices para el desarrollo del contenido de cada área y su respectiva valoración. Son proposiciones que pueden ser usadas para juzgar la calidad del currículo matemático y los métodos de evaluación.

Los estándares curriculares, según *The National Council of Teachers of Mathematics*, fueron divididos en cuatro secciones: preescolar a cuarto de primaria, quinto de primaria a octavo de educación básica, noveno a duodécimo

(para el régimen Americano) y evaluación. Para cada uno de los niveles plantearon entre 13 y 14 estándares por cada área, estableciendo las siguientes cinco metas para los estudiantes:

1. Valoración de la matemática.

2. Ser autosuficiente en la habilidad para resolver problemas.

3. Ser un solucionador de problemas.

4. Aprender a comunicar el pensamiento matemático.

5. Aprender a razonar matemáticamente (usando la lógica matemática).

Las metas anteriores tienen como finalidad el desarrollo del potencial matemático, esto es, las habilidades para explorar, razonar lógicamente y usar efectivamente los métodos para resolver problemas no rutinarios. Dentro de estos propósitos se debe tener presente la matemática como: herramienta para resolver problemas, una forma de comunicarse, una forma de raciocinio y las conexiones entre las diferentes áreas. Estos cuatro aspectos deben ser tenidos en cuenta desde el desarrollo de cada área hasta el de cada lección. Si el trabajo se enfoca bajo esta perspectiva se estará enseñando de una manera "estandar-orientada".

La matemática para solucionar problemas debe ser la parte central del currículo, su principal objetivo, parte integral de la actividad matemática. En lo que respecta a la comunicación del pensamiento significa ser capaz de hablar, escribir, describir y explicar las ideas matemáticas. Lo anterior implica que el estudiante debe tener habilidad no solo para interpretar, sino para usar el lenguaje matemático. En cuanto al raciocinio los estándares pregonan su importancia desde el preescolar. Observar, defender una respuesta, decidir si esta es correcta son actividades que involucran el raciocinio lógico. El raciocinio nos enseña que la matemática no es una serie de recetas, sino un sistema con sentido.

Las conexiones entre los diferentes conceptos matemáticos nos dicen, por ejemplo, que la suma y la diferencia están íntimamente relacionadas, las fracciones están ligadas al concepto de decimales y porcentaje, los símbolos deben estar claramente relacionados con los conceptos que representan. La regla para dividir fracciones no debe ser enseñada sin el soporte teórico del inverso multiplicativo. Finalmente, se debe resaltar que la matemática es una herramienta para el estudio de otras disciplinas tales como la física, las ciencias sociales, la química.

2.5.1. Los estándares curriculares desde preescolar hasta cuarto grado de primaria

El siguiente es el resumen de los factores que contribuyen a mejorar el interés por la matemática y los cambios de contenido propuestos para el nivel de preescolar a cuarto grado de primaria. Se enfatiza en la importancia de los siguientes aspectos:

1. **El número:** El concepto de valor posicional de una cifra y el desarrollo polinómico de los enteros. Significado de fracción y decimal.

2. **Operaciones y cómputos:** Significado de las operaciones. Cómputos mentales. Estimación de la corrección de las respuestas. Selección de métodos apropiados de cálculo. Uso de la calculadora para cómputos complejos. Estrategias de solución.

3. **Geometría y medida:** Propiedades de las figuras geométricas. Relaciones geométricas. Proceso de medida. Concepto de las unidades de medida. Uso de las medidas y las ideas geométricas a través del currículo.

4. **Probabilidad y estadística:** Recolección y organización de datos.

5. **Relaciones:** El uso de las variables para expresar relaciones.

6. **Solución y redacción de problemas:** Problemas de la vida diaria. Aplicaciones. Estrategias para resolver problemas.

7. **Práctica instruccional:** El uso del material manipulable. Discusiones. Justificación del pensamiento. Escribir sobre temas matemáticos. Integración del contenido. Uso de calculadoras y computadoras.

Los siguientes son los estándares para el nivel comprendido desde preescolar hasta cuarto grado de primaria.

1. **La matemática para resolver problemas:** Los estudiantes deben enfatizar en la solución de problemas para: Investigar y comprender el contenido matemático. Formular problemas de la vida diaria que involucren situaciones matemáticas. Desarrollar estrategias para resolver variedad de problemas. Verificar e interpretar resultados referentes al problema planteado. Desarrollar confianza usando la matemática con sentido lógico.

2. **La matemática para la comunicación:** Los estudiantes deben tener la oportunidad de comunicarse para: Relacionar el material concreto y los dibujos con los conceptos matemáticos. Tener un pensamiento claro acerca de las ideas matemáticas. Relacionar el lenguaje matemático con el idioma y los símbolos. Entender que escribir, leer y confrontar ideas son parte vital para el aprendizaje de la matemática.

3. **La matemática para razonar:** Se debe enfatizar el raciocinio para: Obtener conclusiones lógicas. Usar los modelos, hechos conocidos, las propiedades y las relaciones para expresar el pensamiento. Justificar las respuestas y los procesos. Comprender que la matemática tiene sentido.

4. **Conexiones matemáticas:** El estudio de la matemática permitirá al estudiante hacer conexiones para: Encadenar los conceptos y los procedimientos. Reconocer las relaciones entre diversos tópicos de la matemática. Utilizar la matemática en otras áreas del currículo escolar. Usar la matemática en la vida diaria.

5. **Emisión de juicios:** El currículo debe incluir la emisión de juicios para: Reconocer cuando un juicio es apropiado. Determinar cuán razonables son los resultados.

6. **Numeración:** El currículo de matemática debe incluir el concepto de número natural y habilidades para: Construir el concepto de número usando materiales concretos y experiencias de la cotidianidad. Entender los sistemas de numeración y el valor posicional de las cifras. Interpretar el concepto de número mediante situaciones de la vida real.

7. **Operaciones con los naturales:** El currículo debe incluir los conceptos de las cuatro operaciones con los naturales para: Desarrollar el significado de las operaciones a través de modelos y discusión de una variedad de situaciones que conlleven a plantear problemas. Relacionar el simbolismo matemático de las operaciones con los problemas. Reconocer que una variedad de problemas conllevan a una misma operación.

8. **Cómputos con los números naturales:** El estudio de los naturales permitirá a los estudiantes de jardín a cuarto grado de primaria: Demostrar

destreza en el uso de los algoritmos y cómputos con los naturales. Realizar cómputos mentales. Usar la calculadora. Seleccionar las técnicas apropiadas en la solución de problemas.

9. Geometría y sentido espacial: El currículo debe incluir la geometría plana y del espacio tridimensional para: Describir, modelar y dibujar figuras. Desarrollar el sentido espacial. Relacionar las ideas de número y medida. Reconocer y valorar la geometría como parte del mundo físico.

10. Medida: El currículo debe incluir el estudio de las medidas para: Entender los atributos de longitud, capacidad, peso, masa, volumen, tiempo, temperatura y ángulo. Desarrollar el proceso de medida y los conceptos relacionados con las unidades de medida. Hacer uso del concepto de medida en problemas cotidianos.

11. Estadística y probabilidad: El currículo debe incluir experiencias con el análisis de datos y probabilidad para: Recolectar, organizar y describir datos. Formular y resolver problemas relacionados con la recolección y el análisis de datos. Explorar los conceptos probabilísticos.

12. Fracciones y decimales: El currículo debe incluir el estudio de las fracciones y los decimales para que los estudiantes puedan: Desarrollar los conceptos de fracciones, mixtos y decimales. Usar modelos apropiados de fracciones. Encontrar las relaciones entre las fracciones y los decimales y hallar fracciones equivalentes. Usar modelos para explorar las operaciones con fracciones. Aplicar las fracciones y los decimales a problemas.

13. Relaciones: El currículo debe incluir el estudio de las relaciones para que los estudiantes puedan: Reconocer, describir y crear patrones. Representar y describir las relaciones matemáticas. Usar las variables para describir las relaciones mediante oraciones.

2.5.2. Los estándares curriculares para los grados quinto de primaria a octavo de educación básica

Resumen de los factores que contribuyen a mejorar el interés por la matemática y los cambios de contenido en los grados quinto de primaria a octavo de educación básica. Se enfatiza en la importancia de los siguientes aspectos como una forma de incrementar el interés por el aprendizaje de la matemática.

1. **Solución de problemas:** Investigar y formular preguntas sobre situaciones que conlleven al planteamiento de problemas. Representar situaciones, verbal, numérica, gráfica, geométrica o simbólicamente.

2. **Comunicación:** Discutir, escribir, leer y escuchar ideas matemáticas.

3. **Raciocinio:** Razonar en contextos espaciales. Razonar mediante gráficos. Razonar inductiva y deductivamente.

4. **Números, operaciones, cómputos:** Desarrollar el sentido numérico. Crear algoritmos y procedimientos matemáticos. Explorar las relaciones entre representaciones y las operaciones con enteros, fracciones, decimales y números racionales. Comprender los conceptos de razón, proporción y porcentaje.

5. **Funciones:** Identificar y usar las relaciones funcionales. Usar tablas y gráficos para describir situaciones. Interpretar las representaciones matemáticas.

6. **Álgebra:** Manipular símbolos. Realizar procedimientos para resolver ecuaciones.

7. **Estadística y probabilidad:** Usar métodos estadísticos para describir, analizar, evaluar y tomar decisiones. Crear experimental y teóricamente modelos de situaciones probabilísticas.

8. **Geometría y medida:** Desarrollar y entender los objetos geométricos y sus relaciones. Usar la geometría para resolver problemas. Estimar y usar medidas para resolver problemas.

9. **Práctica instruccional:** Involucrar a los estudiantes individualmente y en grupos para explorar, conjeturar, analizar y aplicar la matemática en contextos matemáticos y de la vida diaria. Usar adecuadamente la tecnología para realizar cómputos e investigaciones. Facilitar el aprendizaje. Valorar el aprendizaje como parte integral del proceso de instrucción.

Los siguientes son los estándares para el nivel comprendido desde quinto de primaria hasta el octavo de enseñanza básica.

1. **La matemática para resolver problemas:** En los grados quinto a octavo el currículo debe incluir numerosas y variadas experiencias con la solución de problemas como un método de aplicación para que los estudiantes puedan: Usar la solución de problemas para investigar y entender el contenido matemático. Formular problemas dentro y fuera del contexto matemático. Aplicar estrategias para resolver haciendo énfasis en problemas no rutinarios. Verificar e interpretar resultados. Generalizar soluciones y estrategias a nuevas situaciones. Adquirir autosuficiencia en el uso de la matemática.

2. **La matemática para la comunicación:** La matemática debe incluir la oportunidad de comunicarse para que los estudiantes puedan: Propiciar situaciones para usar el lenguaje oral, los dibujos y los métodos algebraicos. Reflejar y clarificar el pensamiento matemático. Usar las habilidades de lectura y escritura para interpretar y evaluar las ideas. Discutir las ideas matemáticas realizando conjeturas y argumentos convincentes. Apreciar el valor de la simbología matemática y su rol en el desarrollo de las ideas.

3. **La matemática para razonar:** El raciocinio matemático permitirá a los estudiantes: Reconocer y usar el razonamiento inductivo y el deductivo. Aplicar con claridad los procesos de razonamiento. Evaluar los argumentos. Validar el pensamiento individual. Apreciar el poder del razonamiento como una parte de la matemática.

4. **Conexiones matemáticas:** El currículo debe incluir la investigación de las conexiones matemáticas para: Ver la matemática como un todo integrado. Usar las ideas matemáticas para desarrollar y fortalecer nuevas ideas. Aplicar el pensamiento matemático en otros campos tales como las artes, la música, la sicología, las ciencias y el mercadeo. Valorar el rol de la matemática en nuestra cultura y en la sociedad.

5. **El número y las relaciones numéricas:** El currículo debe incluir un continuo desarrollo del número y sus relaciones para: Entender y representar los números en una variedad de formas (enteros, fracciones, decimales, porcentajes, exponentes, notación científica) en situaciones matemáticas y de la vida real. Desarrollar el sentido de número sea cual fuere su forma. Investigar las relaciones entre las diferentes clases de números.

6. **Sistemas numéricos y teoría de números:** El currículo incluye los sistemas numéricos y la teoría de los números para: Entender y apreciar la necesidad de usar otros números que no sean los enteros. Usar las relaciones de orden en los diferentes sistemas numéricos. Extender las operaciones con los enteros a otros sistemas. Investigar las relaciones entre los diferentes sistemas numéricos y representarlas.

7. **Cómputos:** El currículo debe propiciar el cálculo numérico para: Realizar operaciones con los diferentes sistemas numéricos. Realizar, analizar y explicar los procesos de computación y resolver proporciones. Seleccionar y usar métodos apropiados para ejecutar cálculos mentales, escritos y con computadores. Comprobar si las soluciones son razonables.

8. **Funciones:** El currículo incluye el estudio de las relaciones y las funciones para: Describir, analizar y crear modelos o patrones. Describir y representar las relaciones mediante gráficos, tablas y reglas. Analizar las relaciones funcionales explicando cómo el cambio de una cantidad afecta las que están relacionadas con ella. Usar las funciones para resolver problemas.

9. **Álgebra:** El currículo incluye el desarrollo del álgebra para: Entender los conceptos de variable, expresión y ecuación. Explorar las interrelaciones de las representaciones ya sean mediante tablas, reglas, gráficos u otras. Desarrollar autosuficiencia en la solución de ecuaciones lineales usando métodos formales o informales. Aplicar los métodos del álgebra para resolver problemas matemáticos o de la vida real.

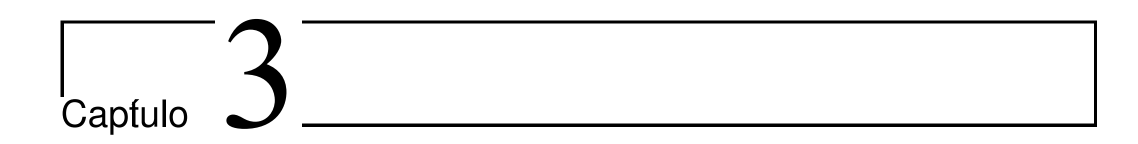
10. **Estadística:** La estadística se debe usar para explorar situaciones reales para que el estudiante pueda: Recolectar, analizar, organizar y describir sistemáticamente datos. Construir, leer e interpretar diagramas. Realizar inferencias y presentar y evaluar argumentos convincentes que tengan que ver con el análisis de datos. Ver la importancia de los métodos estadísticos en la toma de decisiones.

11. **Probabilidad:** La probabilidad se debe usar para explorar situaciones reales para que el estudiante pueda: Realizar experimentos o simulaciones para determinar la probabilidad de ocurrencia de un fenómeno. Construir un espacio de muestreo para determinar la probabilidad de

ocurrencia de un fenómeno. Realizar predicciones basadas en experimentos probabilísticos teóricos o prácticos. Ver la importancia de la probabilidad en el mundo real.

12. Geometría: El currículo debe incluir el estudio de la geometría plana y del espacio para: Identificar, describir, comparar y clasificar las figuras geométricas. Estudiar las transformaciones geométricas. Representar y resolver problemas usando los modelos y los métodos de la geometría. Aplicar las relaciones geométricas. Ver la importancia de la geometría como medio de describir el mundo físico.

13. Medida: El currículo debe incluir experiencias concretas con la medición para: Extender el conocimiento de los procesos de medición. Usar la medición para comparar fenómenos. Seleccionar unidades apropiadas y herramientas para medir el grado de exactitud de la medida en un determinado proceso. Entender la estructura y el uso de los sistemas de medida. Extender el conocimiento de los conceptos de perímetro, área, volumen, medida de ángulos, capacidad, peso y masa. Desarrollar el concepto de razón y otros derivados. Desarrollar fórmulas y procedimientos para determinar medidas y resolver problemas.



EL CONCEPTO DE NÚMERO

3.1. El sentido numérico

El concepto de número es complejo y envuelve el manejo de cierta clase de actividades que incluyen no solo contar y reconocer la representación escrita sino tener desarrolladas las ideas de las partes y el todo, las conexiones con las cantidades reales y sus medidas y las relaciones que existen entre estas nociones. Dado que estas relaciones no son adquiridas automáticamente es tarea del maestro proveerlas mediante actividades que permitan construirlas. Por ejemplo, contar una cantidad nos indica el total de elementos que pertenecen a un conjunto.

Los números tienen diferentes connotaciones cuando se relacionan con objetos concretos especialmente en lo que se refiere al tamaño de los elementos; esto significa que no es lo mismo tener 8 vacas que 8 ratoncillos si pensamos en el espacio que ocupan, sin embargo si hacemos abstracción de este hecho notamos que representan la misma cantidad. La diferencia entre 300 y 200, si son pesos, no es significativa, pero si son millones de pesos es considerable aunque en ambos casos esta se reduce al número 100. Por otra parte, 25 segundos es un tiempo definitivamente menor que 15 minutos. El número 10 en principio no es entendido como una unidad de orden superior, en la mente infantil no florece la idea que la pluralidad que representa dicho número sea compatible con la singularidad descrita en una decena, por esta razón no es conveniente en las primeras etapas expresar relaciones de la clase $12 = 10+2$, cuyo significado es que doce es un diez más dos.

El sentido numérico fue descrito por Howden (1989, 11) como: “Una buena

intuición acerca de los números y sus relaciones". Se desarrolla gradualmente como consecuencia de explorar los números, visualizarlos en una variedad de conceptos y relacionarlos de tal modo que no estén limitados por los algoritmos. Según *The National Council of Teachers of Mathematics* el sentido numérico involucra cinco componentes:

1. Entendimiento correcto del sentido de número.

2. Las relaciones múltiples entre ellos.

3. Reconocimiento de la magnitud relativa de los números.

4. Conocimiento del efecto de las operaciones con los números.

5. Significado de la medida en el mundo real.

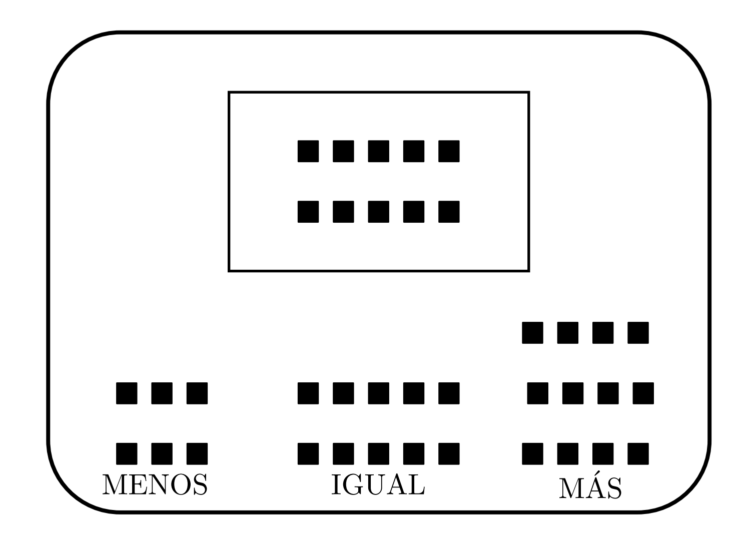
Para que el proceso de contar sea significativo el infante debe tener la habilidad de recitar la lista de los números en el correspondiente orden y establecer la correspondencia uno a uno con los objetos contados. Contar objetos que puedan ser tocados y movidos tiene mejor provecho que contar sin manipular; de igual manera es mejor que estén unidos antes que desperdigados. La idea detrás de todo esto es facilitar el conteo. La cantidad que se va a contar es directamente proporcional al grado de dificultad para realizar el ejercicio.

Como primera observación se tiene que los nombres de los números del 1 al 15 no siguen ninguna regla; y con respecto a los demás, al principio el estudiante no identifica el patrón seguido al nombrarlos, por ejemplo: dieci**séis**, dieci**siete**, dieci**ocho**, dieci**nueve**, veinti**uno**, cuarenta y **cinco**.

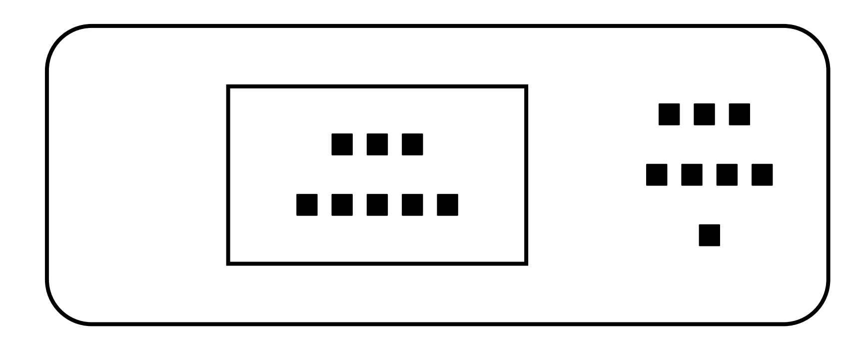
Se debe establecer una diferencia entre el proceso de contar como mera descripción y la idea que hay detrás de dicho proceso. Cuando contamos los elementos de un conjunto, la palabra usada para representar al último de los nombrados indica la cantidad de sus elementos; esto es el cardinal de dicho conjunto o el número de los elementos que posee. Cuando el niño asocia estas ideas se dice que ha desarrollado el principio de la cardinalidad. Un estudiante ha desarrollado el anterior principio si al preguntarle cuántos elementos tiene un determinado conjunto; después de enumerarlos le asigna el último número, por ejemplo, si ha contado del 1 al 15, responde: *quince*. En el aula se puede ayudar a desarrollar el principio de la cardinalidad con conjuntos cuyos elementos tengan diferentes tamaños; estableciendo primero diferencias y semejanzas entre ellos y posteriormente haciendo notar que esta circunstancia no varía la totalidad; o reagrupándolos después de contados,

preguntar si este hecho varía el resultado. Otro ejercicio consiste en construir conjuntos que tengan igual cantidad de elementos que uno previamente establecido.

El uso de las ideas *más, menos* e *igual*, referidos a la cantidad de elementos y las relaciones entre ellas, contribuyen a la obtención del concepto de número. Estas ideas permiten establecer comparaciones y jerarquías, fundamento de la relación de orden entre los números.



Tomando como referencia el conjunto de la izquierda, un ejercicio consiste en pedir al estudiante dibujar otro que tenga igual número de elementos dispuestos en un orden diferente. Una respuesta se ilustra a la derecha.



A pesar que los conceptos de más y menos son similares, la relación "ser menor que" es más difícil de asimilar, tal vez por el carácter egocéntrico de los

niños. Se recomienda practicar estos conceptos indicándoles que seleccionar un conjunto con más elementos es equivalente a no seleccionar el que posee menos; o al momento de seleccionar el conjunto con más elementos, preguntar por el que tiene menos.

El juego del dominó consiste en colocar fichas que coincidan por el lado en que representan la misma cantidad. Esta particularidad la podemos aprovechar para usarlo como material didáctico para fijar el concepto de igualdad. Una variante consiste en fabricarlo con cartón y en lugar de los puntos negros se escriben las cifras correspondientes, omitiendo las fichas blancas. El juego se inicia colocando sobre la mesa una ficha cualquiera e ir ubicando a continuación, de izquierda a derecha, las que coincidan en cantidad hasta agotar las posibilidades usando el mayor número posible de fichas. Por ejemplo,



Otras formas de juego sirven para desarrollar los conceptos de mayor y menor. Jugar al "2 más" consiste en iniciar con una ficha cualquiera y colocarle a continuación una que represente el número que sea dos unidades mayor. Si comenzamos con la ficha:



se establece la siguiente secuencia:

Para usar el mayor número de fichas que cumplan con la condición se debe analizar cada posibilidad. Por ejemplo, con la sucesión:

se finaliza el juego. La mejor opción es la que aparece en la ilustración anterior.

La escritura de los números del 1 al 10 es similar a la escritura del alfabeto, pero es necesario presentar modelos y establecer relaciones entre ellos. Por ejemplo, dado un conjunto con seis elementos se pide confeccionar otro que contenga dos elementos más o uno menos. Este tipo de ejercicios debe llevar al estudiante a desarrollar relaciones del siguiente tenor:

$$8 = 6 + 2$$

$$5 = 6 - 1$$

$$9 = 5 + 4$$

$$7 = 10 - 3$$

La idea es representar los números del 1 al 10 como sumas o restas de ellos mismos. Un ejemplo consiste en tomar al número 7 y dar una lista de tres números, dos de los cuales, al sumarlos o al restarlos den por resultado 7, así:

$$1, 5, 6$$

$$5, 2, 4$$

$$7, 2, 0$$

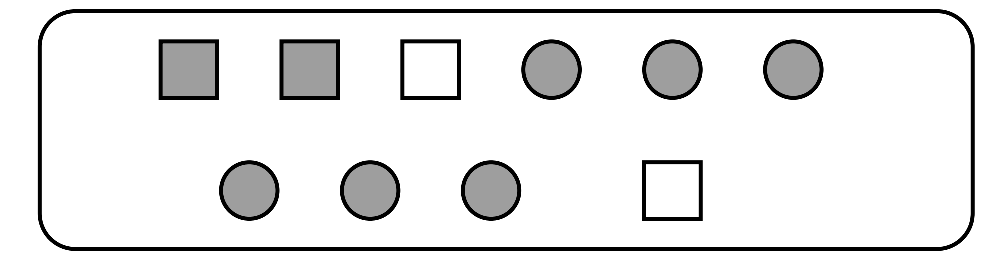
$$3, 4, 5$$

$$9, 2, 3$$

$$8, 4, 1$$

Los estudiantes deben justificar las respuestas.

A continuación se describen dos modelos



El superior representa la expresión: "2 más 1 más 3" y el inferior se interpreta como: "3 más 1".

Como se indicó anteriormente, antes del segundo grado no tiene sentido presentar el desarrollo polinómico de los números entre 10 y 20. Al niño en

esta etapa no se le debe pedir que piense en el 15 como en un diez más cinco. La actividad en esta etapa es presentarlos como: *diez y uno son once*, *diez y tres son trece*, *diez y cinco son quince* y así sucesivamente. El desarrollo polinómico implica el conocimiento de otras ideas preliminares.

En la etapa de aprendizaje de los números de 1 a 9 la calculadora es un instrumento pedagógico invaluable. Teniendo en cuenta que la pantalla de la calculadora, al inicio de cada ejercicio debe mostrar el número cero, ordene presionar la tecla de un número determinado entre uno y nueve. Posteriormente, este ejercicio debe realizarse con números de dos o más cifras enunciando solamente las cifras, por ejemplo, *tres-cinco-nueve* no *trescientos cincuenta y nueve*. Más tarde pueden digitar el número telefónico, la edad de los papás, y así sucesivamente.

Otro ejercicio consiste en seleccionar un número y a continuación presionar la tecla + seguida de otro número y presionar la tecla = un número determinado de veces. Dependiendo de las veces que presione la tecla =, en la pantalla aparecerá el primer número seleccionado aumentado en múltiplos del segundo; por ejemplo, la secuencia, "2 + 3 = = = =", hará aparecer en la pantalla los números $5, 8, 11, 14$. La sucesión, "2 + 2 = = = = =" le permitirá leer los números $4, 6, 8, 10, 12$, esto es, múltiplos de 2. Por su parte, ejecutando "5 + 5 = = = =" mostrará sucesivamente $10, 15, 20, 25$.

Los dobles y los dobles cercanos por adición de la unidad sirven como estrategia para ir memorizando las 81 adiciones básicas, o sea, las posibilidades de sumar los números del 1 al 9; no hay razón para que el estudiante dilate esta tarea si más tarde debe hacerlo. El doble de 4 es 8, mientras que su doble cercano es 9.

Dé un número par y pregunte de quién es el doble, por ejemplo, *¿el dieciocho de quién es el doble?* ($18 = 2 \times 9$). Usando la calculadora se puede hallar el doble de un número; basta digitarlo seguido de las teclas + =, por ejemplo, "7 + =" hará aparecer en pantalla el 14.

Por otra parte, enuncie un número impar y pregunte de quién es el doble cercano, por ejemplo, *¿el trece de quién es el doble cercano?* ($13 = 2 \times 6 + 1$). Usando estas ideas, la suma "7 + 8" se puede calcular como el doble cercano a 7 que es 15.

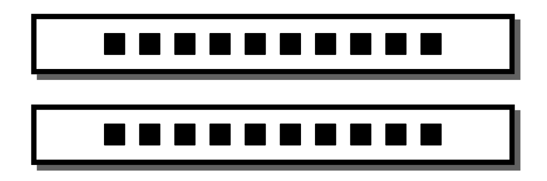
El conteo progresivo y regresivo, incluyendo cantos, juegos o rondas son otras ideas para tener en cuenta, pero recuerde practicar con un solo número por día. La habilidad para leer y escribir cifras, así como contar progresiva y regresivamente (de menor a mayor y viceversa) y el uso de los símbolos para representar las relaciones mayor, menor e igual ($>, <, =$) son actividades

importantes para fortalecer el concepto de número.

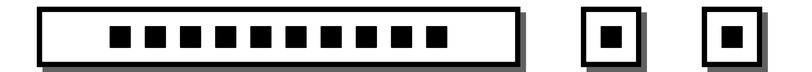
Otro hecho para destacar es la relación del número con la medida. En este sentido se deben establecer diferencias y similitudes entre expresiones, tales como tres días, tres metros de tela, tres galones de gasolina, tres litros de agua. El maestro debe propiciar discusiones al respecto.

A partir del segundo grado es necesario iniciar el estudio de los números hasta el 100. Extrapolando las ideas anteriores se debe comenzar a mirar la conveniencia de formar grupos de diez cada vez que tengamos la oportunidad.

La figura



es un modo de mirar a 20 como dos grupos de 10. El 12 se representa así,



3.2. La forma polinómica de los naturales

Es importante conocer cómo se desarrolla el concepto del valor posicional de las cifras de un entero positivo en los primeros años. Teniendo en cuenta que el número es un concepto lógico y que el pensamiento lógico formal sólo se adquiere a partir de la preadolescencia es importante inducir dicho concepto desde un punto de vista sicológico.

Aunque los niños desde muy temprano son capaces de contar hasta 100 y tenen cierta claridad sobre dicho número, esa idea está fundamentada en la relación “poseer 1 más”, lo que es un reflejo de contar de uno en uno.

Con mucha frecuencia los menores tienen la habilidad para contar objetos cuyo número corresponda a una cantidad de dos cifras, pero el conteo lo ejecutan separando los elementos uno a uno sin agruparlos y al final nombran la cantidad sin mayor tropiezo.

Si le preguntamos a un escolar de primer grado, por ejemplo, cuál es el número que es 10 unidades mayor que 63, lo más probable es que inicie el conteo a partir de dicha cifra hasta completar 10 unidades más. No posee la

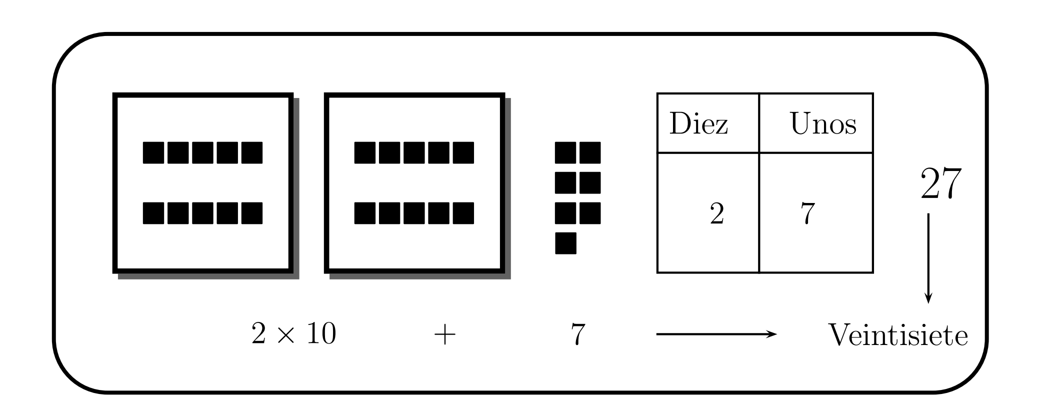
destreza para responder inmediatamente que es 73. Si se le pregunta cuál es el número que es 10 unidades menor, la situación se torna más problemática. Con poco esfuerzo es capaz de aprender que al escribir un número de dos cifras la primera representa las decenas y la segunda las unidades, sin tener claridad del número de estas últimas que necesita para conformar una decena.

Prevalece la idea que un número de dos cifras es "una cantidad considerable" sin tener en cuenta que 6 decenas significan seis grupos de 10. Con este presupuesto se debe iniciar el aprendizaje de la representación polinómica de los enteros.

La primera tarea es orientarlos para que durante el proceso de contar vayan formando grupos bien definidos de 10, dejando por fuera lo que sobre, si no se alcanza a completar la decena. Haga énfasis en que la forma de agrupar no es única, esta conduce a escrituras equivalentes del mismo número de acuerdo con la formulación del problema planteado. Por ejemplo, el número 27, entre otras, tiene las dos representaciones siguientes:

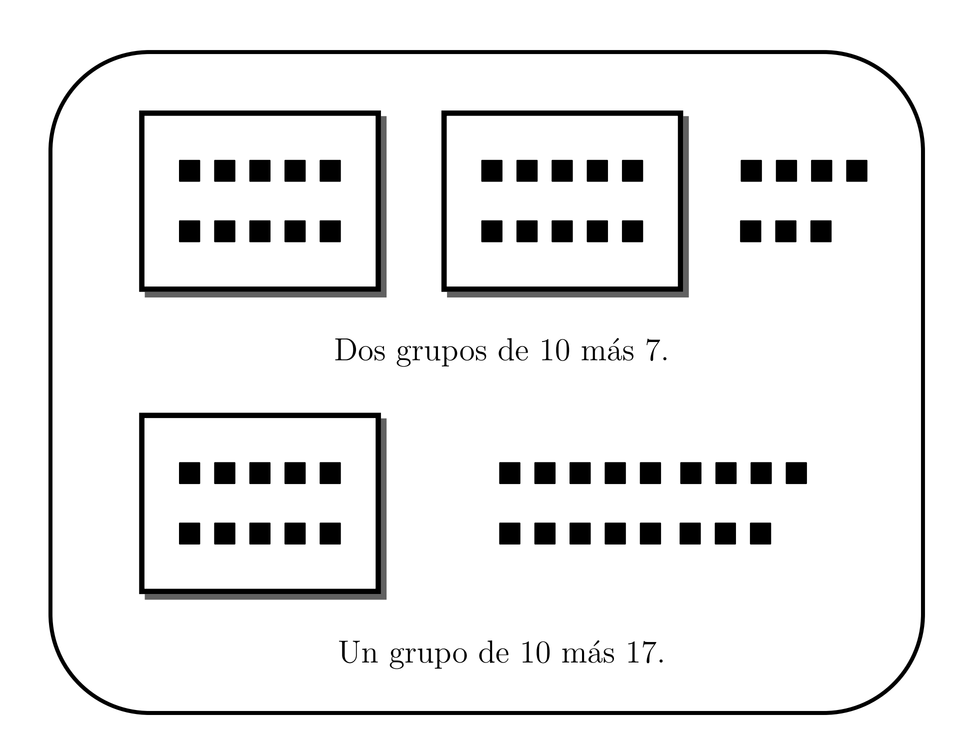
$$20 + 7$$

$$10 + 17$$



Con el anterior diagrama se ilustran las relaciones existentes entre el modelo conjuntista, los números, las palabras y la escritura de las cifras.

Por otra parte, se presentan modelos que sirven para mostrar las dos formas mencionadas de escribir el número 27. El primero representa la suma $20 + 7$, mientras que el segundo es $10 + 17$.



En esta etapa el lenguaje es crucial. Simultáneamente se asignan sinónimos como: "dos grupos de diez y sobran siete", "dos grupos de diez más siete", "dos veces diez más siete", "dos por diez más siete", "veintisiete". Para los números de tres cifras se procede de manera semejante. La palabra *cien* debe interpretarse de tres diferentes maneras: como 100 objetos simples, como 10 grupos de diez, y como un solo objeto.

Invite a jugar a las adivinanzas como las siguientes: Adivina quién soy si tengo 3 cientos, 14 grupos de diez y 7. Adivina quién soy si poseo 23 y 4 cientos. Adivina quién soy si tengo 2 cientos y 8. Adivina quién soy si tengo 14 grupos de diez, 5 cientos y 2.

Las relaciones entre los dígitos se extrapolan como se dijo con antelación; por ejemplo:

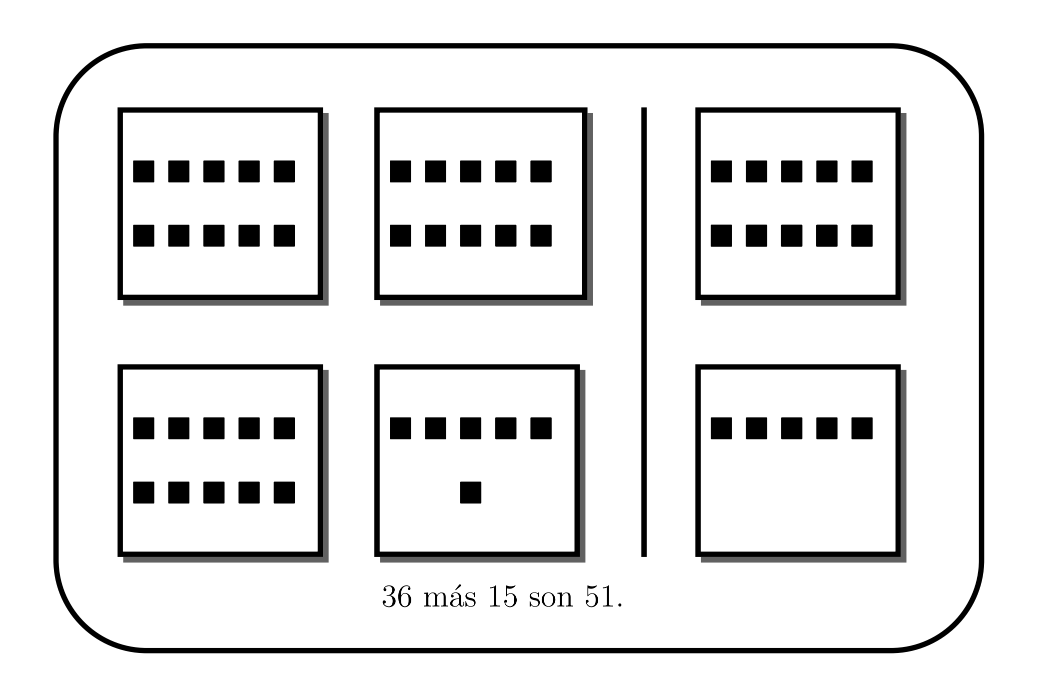
Si 1 más 4 es 5, de igual forma se puede decir que 1 grupo de diez más 4 grupos de diez son 5 grupos de diez, o que 10 más 40 es 50.

Otro ejemplo puede ser:

Si al sumar $7 + 4$ se procede de la siguiente forma:

4 es 3 más 1, luego en total 7 más 3 más 1 son 10 más 1, esto es 11. Al sumar $30 + 7 + 4$, se puede concluir que 7 más 4 es 10 más 1, luego 30 más 10 es 40 y 40 más 1 es 41.

Los modelos ayudan a desarrollar la habilidad de contar con números mayores ya que las relaciones desarrolladas en un principio tienen un impacto en la mente infantil de tal magnitud que les permiten interpretar las nuevas relaciones. Por ejemplo,



Se recomienda a los maestros de los grados más avanzados hacer uso de materiales mejor estructurados como el ábaco, las balanzas u otro tipo de contadores de base decimal.

Como conclusión, tenga presente que si el estudiante ha aprendido a contar completando diez y agregando lo que sobra, esta misma estrategia le será de utilidad al contar cifras mayores.

Durante el segundo año induzca a los niños a agregar cientos. lo cual les permitirá no sólo incrementar la habilidad para realizar cómputos mentales sino el entendimiento del valor posicional de las cifras. Por ejemplo, usando la calculadora se le pide a un estudiante digitar el número 200 y a continuación la tecla + seguida de 345; los compañeros, después de operar, deben escribir 545, respuesta que debe coincidir con la dada por la calculadora.

En el grado tercero proponga problemas que tengan que ver con multiplicaciones de números de tres cifras por 3, 4 o 5 para resolverlos mediante sumas repetidas, incluso divisiones como $312 \div 3$ usando restas sucesivas.



Paula mediante el uso de las regletas debe identificar las cifras escritas.

Las ideas propuestas son apenas guías para orientar al maestro en una labor que no es fácil de abordar. Números como diez mil, cien mil o un millón deben ser tratados de tal modo que podamos pensar en ellos como cosas imaginables. Por ejemplo, cuántos granos hay en una libra de arroz o en diez libras; cuántas gotas de agua hay en un litro.

El objetivo es escribir cualquier natural usando el desarrollo polinomial en potencias de 10, comunmente conocido como Sistema decimal de numeración. Este es el familiar sistema posicional en el cual todo natural se representa en forma única con una sucesión conformada por los diez símbolos "0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9", o por medio de un polinomio escrito con potencias decrecientes de 10. Por ejemplo, el número seiscientos treinta y cinco se escribe:

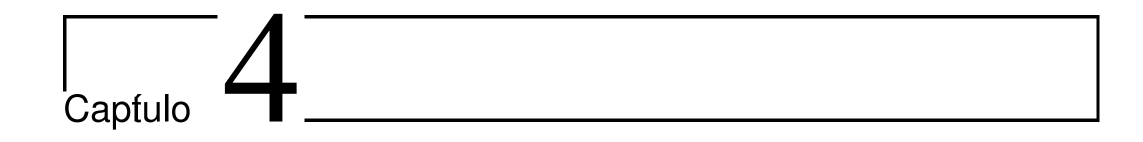
$$\begin{aligned} 635 &= 600 + 30 + 5 \\ &= 6 \times 100 + 3 \times 10 + 5 \times 1 \\ &= 6 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0 \end{aligned}$$

Por su parte, ocho mil novecientos treinta y siete se representa por:

$$\begin{aligned} 8937 &= 8000 + 900 + 30 + 7 \\ &= 8 \times 1000 + 9 \times 100 + 3 \times 10 + 7 \\ &= 8 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \end{aligned}$$

Si en la escritura de un número aparece un cero, la potencia correspondiente debe aparecer en su representación. El número doscientos ocho se escribe así:

$$\begin{aligned} 208 &= 200 + 0 + 8 \\ &= 2 \times 100 + 0 \times 10 + 8 \\ &= 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \end{aligned}$$

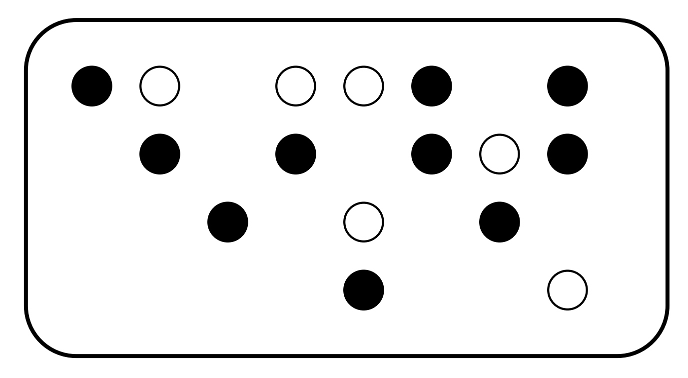

Captulo 4

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

4.1. Preparación sicológica

Los niños menores de siete años a menudo son incapaces de considerar el total como una clase lógica. Mientras que un adulto concibe que 5 es lo mismo que 4+1 o 3+2, el menor de siete años usualmente no. En estas condiciones no ha adquirido la *reversión del pensamiento* que le permite al adulto pensar que si $3 + 2 = 5$, es porque $5 = 3 + 2$. Tampoco maneja la relación de inclusión.

Para determinar si el menor está listo para formalizar la adición, se debe administrar una prueba de inclusión. Se toman fichas de algún material, madera por ejemplo, de dos colores (negras y blancas, pero más negras). El niño que no ha asimilado el concepto dirá que hay más negras que de madera.



Según Copeland (1972, 95), se presenta el siguiente diálogo:

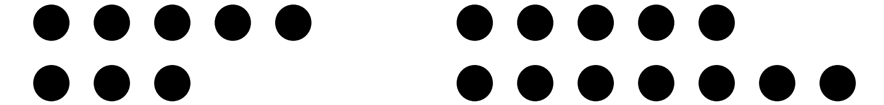
–Valery, ¿sabes que clase de objetos hay?

–Sí, fichas.

–¿De qué están fabricadas?
–De madera.
–¿De qué colores son?
–Blancas y negras.
–¿Hay más negras o de madera?
–Hay más negras.
–¿Son las negras de madera?
–Sí.
–Son las blancas de madera?
–Sí.
–¿Entonces hay más negras o más de madera?
–Hay más negras.

Esta niña es incapaz de considerar el todo y sus partes simultáneamente, un proceso que involucra el concepto lógico de inclusión y la reversión del pensamiento.

Otras pruebas similares pueden administrarse; por ejemplo: a un niño la maestra le regala 5 caramelos por la mañana y 5 por la tarde, al día siguiente le regala 3 por la mañana y 7 por la tarde; y le pregunta si le ha obsequiado igual cantidad los dos días. El escolar que no ha adquirido el concepto de la cantidad dirá que le regalaron más el segundo día en virtud que 7 ocupa más espacio que 5.



No usa la lógica, y no tiene sentido memorizar que $5 + 5 = 10$ y $3 + 7 = 10$.

4.2. Significado de las operaciones

Probablemente la mejor forma de llegar a entender el significado de las operaciones es mediante la solución de problemas, considerando en este caso por problema *una proposición expresada en palabras cuya solución lleva al planteamiento de alguna igualdad que relacione una o más cantidades desconocidas con otras conocidas denominadas datos*. Estos problemas llevan a explorar los diversos significados de las operaciones.

Dependiendo de la simplicidad, los niños adquieren la habilidad de encontrar soluciones mediante modelos. Este proceso permite desarrollar nuevas

estrategias de conteo, pero lo que no está bien establecido es cuál es la mejor forma de aprender a plantear ecuaciones que interpreten de una manera simbólica lo descrito por los modelos.

Definitivamente no es lo mismo resolver una suma particular que plantear y resolver esta misma suma como parte de la solución de un problema. En la segunda tarea hay un proceso de maduración, mientras que en la primera puede ser solo el desarrollo de un algoritmo.

En lo referente a la suma enuncie diferentes tipos de problemas como los siguientes:

Problemas que plantean reunión o agregado: En este primer tipo se conocen tres ingredientes, una cantidad inicial, una cantidad que será agregada y un total; esto es, el efecto de agregar. La parte desconocida puede ser perfectamente cada uno de los tres componentes mencionados.

- En el siguiente problema la parte desconocida es el total.
  Carlos tiene 8 caramelos y su hermano le regaló 6 más. ¿Cuántos tiene en total?

- La parte desconocida corresponde a la cantidad que se agregará.
  Carlos tiene 8 caramelos y su hermano le regaló otros. Si tiene un total de 14, ¿cuántos le regaló su hermano?

- La cantidad desconocida es la inicial.
  Jorge le regala a Carlos 6 caramelos y ahora tiene un total de 14. ¿Cuántos tenía al principio?

Problemas que plantean disgregación: En estos problemas la cantidad inicial es la mayor, a diferencia de los que plantean reunión, donde el resultado es la cantidad mayor.

Veamos unos ejemplos.

- La cantidad desconocida es el total.
  Carlos tenía 14 caramelos y le regaló 8 a su hermano. ¿Cuántos tiene ahora?

- La cantidad desconocida es la cantidad que se agregará.
  Carlos tenía 14 caramelos y le regaló algunos a su hermano. Si ahora tiene 6, ¿cuántos regaló?

- La cantidad desconocida es la cantidad inicial.
  Carlos tenía cierta cantidad de caramelos, le dio 8 a su hermano y le quedan 6. ¿Cuántos tenía inicialmente?

Se afirma sin pensarlo dos veces que la suma implica agregar y la resta quitar, lo cual no es del todo cierto. Note cómo en un tipo de problemas de la clase que plantea reunión, su solución conlleva a una resta (problemas segundo y tercero), mientras que otros que plantean disgregación llevan a resolver sumas (problema sexto).

Problemas de la clase parte-parte-total: De esta clase hay dos tipos de problemas: cuando el total es desconocido o cuando una parte es la desconocida.

- Total desconocido.
  Carlos tiene 5 pelotas de caucho y 3 trompos. ¿Cuántos juguetes tiene en total?

- Una parte desconocida.
  Carlos tiene 12 juguetes entre trompos y pelotas de caucho. ¿Si tiene 3 trompos, cuántas pelotas de caucho posee?

Problemas que establecen comparaciones entre dos cantidades: La tercera cantidad es la diferencia entre ellas. Se presentan tres tipos de problemas; teniendo en cuenta que la cantidad desconocida puede ser la mayor, la menor o la diferencia. Cada uno de ellos se plantea en términos de más o de menos.

- La cantidad desconocida es la diferencia.
  Jorge tiene 5 caramelos y Sara 8. ¿Cuántos más que Jorge tiene Sara?
  Jorge tiene 5 caramelos y Sara 8. ¿Cuántos menos que Sara tiene Jorge?

- La cantidad desconocida es la mayor.
  Jorge tiene 5 caramelos más que Sara. Si Sara tiene 9, ¿cuántos tiene Jorge? Sara tiene 5 caramelos menos que Jorge. Si Sara tiene 9, ¿cuántos tiene Jorge?

- La cantidad desconocida es la menor.
  Sara tiene 4 caramelos menos que Jorge. Si Jorge tiene 6, ¿cuántos tiene Sara? Jorge tiene 4 caramelos más que Sara. Si Jorge tiene 6, ¿cuántos tiene Sara?

No se pretende que el maestro proponga todos los tipos de problemas presentados; el objetivo es que tenga una amplia gama de posibilidades para desarrollar sus propias ideas. Lo ideal es que redacte problemas que atraigan la curiosidad estudiantil, con el propósito de propiciar un ambiente de análisis. Las situaciones planteadas deben aprovechar las vivencias personales, usar los nombres de los alumnos, agregar información no necesaria u omitir alguna, para que a través de la discusión, se descubra la información sesgada y se corrija la redacción. Lo importante no es llegar a encontrar una solución sino analizar relaciones y discutir las tendencias.

Enuncie los problemas en forma oral o escríbalos en el tablero. Si los estudiantes se organizan por grupos deben presentar la solución por cada uno de los grupos conformados, siempre justificando las respuestas y describiendo el proceso seguido para llegar a la solución. Las justificaciones y respuestas deben ser con oraciones completas: *Ahora Enrique posee* 5 *juguetes*. En un período de clase asigne un número apropiado de ejercicios para tener la oportunidad de realizar un análisis completo de cada uno de ellos. No se trata de establecer una carrera contra el tiempo; un máximo de tres problemas para los cincuenta minutos de clase es una tarea razonable.

En los primeros grados, si el estudiante todavía no es experto en la realización de sumas extensas, proponga problemas con números entre 10 y 100 cuyas sumas se puedan realizar usando los dobles, los dobles cercanos o cifras cuyas unidades sumen 10, como 47, 53. Si usa números de tres cifras estos preferiblemente deben ser pares. Estas estrategias tienen como objeto preparar el desarrollo mental previo a la mecanización del algoritmo de la suma y descubrir formas para realizarlas. Permita el uso de las calculadoras.

Al resolver los problemas, se deben analizar tanto las respuestas como los conceptos usados. Volviendo al enunciado: Carlos tiene 8 caramelos y le regalaron otros. Si tiene un total de 14, ¿cuántos le regalaron?

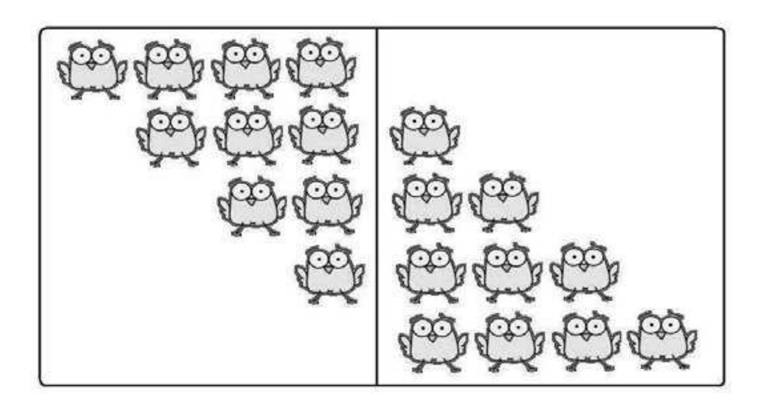
Algunos estudiantes pueden plantear la igualdad $14 = 8+6$; mientras que otros pueden escribir $14 - 8 = 6$. Un análisis de estas dos igualdades sirve para mostrar que ambas son soluciones de la ecuación: $8 + \square = 14$.

4.3. Preparación para la suma

El estudio de las familias numéricas consiste en analizar cada número del 1 al 9 en términos de dos sumandos. Con el número 5, por ejemplo, se establecen las siguientes igualdades:

$5 = 5 + 0$		$5 + 0 = 5$
$5 = 4 + 1$		$4 + 1 = 5$
$5 = 3 + 2$	TAMBIÉN	$3 + 2 = 5$
$5 = 2 + 3$		$2 + 3 = 5$
$5 = 1 + 4$		$1 + 4 = 5$
$5 = 0 + 5$		$0 + 5 = 5$

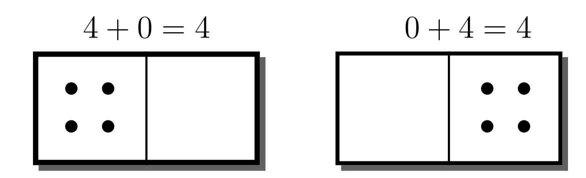
Tenga cuidado con las expresiones donde aparezca el cero; si se presentan problemas con el cero, estas expresiones deben posponerse. Como se observa en el ejemplo, la familia del 5 contiene los números $0, 1, 2, 3, 4$ (cinco se puede considerar como el padre o generador). La familia del 7 contiene los números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ y así sucesivamente. Un estudio similar debe hacerse para los demás usando material concreto, por ejemplo, para el 4 (se deben leer los dibujos en los sentidos izquierda-derecha y viceversa).



Dominar las sumas básicas significa que el estudiante esté en capacidad de dar una respuesta correcta en menos de tres segundos, sin recurrir a ayudas como contar con los dedos u otro procedimiento. La disponibilidad de la tecnología electrónica no disminuye la importancia de adquirir la habilidad de realizar todas las sumas donde los sumandos sean menores que diez, tarea que pueden abordar con éxito hasta aquellos que presenten dificultad en el aprendizaje. Lo que todo niño necesita es apropiarse de las herramientas mentales que le garanticen el pleno conocimiento de la tabla de sumar.

Para iniciar la construcción de la tabla, parta de sumar cero teniendo el cuidado de superar las dificultades que se pudieran suscitar. Las barajas numéricas son una ayuda insuperable para obviar dificultades y sirven además

para fijar la idea que no siempre el resultado de la suma debe ser mayor que cada uno de los sumandos. La propiedad clausurativa establece que la suma de dos naturales es un natural único, pero no excluye la posibilidad de ser uno de ellos.



Por otra parte, el siguiente o sucesor de un natural es aquel que es una unidad mayor. Con esta idea se tiene que $1+1=2$, $2+1=3$, y así sucesivamente hasta $9+1=10$. El concepto de sucesor y la propiedad conmutativa permiten escribir la segunda fila y la segunda columna.

Con los dobles se analizan situaciones como: $2+2$, $3+3$, hasta $9+9$. Estas casillas aparecen sombreadas en la tabla con gris oscuro.

Con los dobles cercanos se desarrollan las siguientes sumas: $1+2$, $2+3$, $3+4$, $4+5$, $5+6$, $6+7$, $7+8$, $8+9$ y sus respectivas conmutaciones. Los resultados aparecen marcados con asteriscos.

Como se expresó, el complemento de un número es la diferencia entre dicho número y la mayor potencia de diez más cercana a él. Esta idea permite sumar $1+9$, $2+8$, $3+7$, $4+6$ y sus conmutaciones. Estas casillas se muestran sombreadas con gris más claro.

Las situaciones anteriores se pueden condensar en la siguiente tabla:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3*	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3*	4	5*					10	
3	3	4	5*	6	7*			10		
4	4	5		7*	8	9*	10			
5	5	6			9*	10	11*			
6	6	7			10	11*	12	13*		
7	7	8		10			13*	14	15*	
8	8	9	10					15*	16	17*
9	9	10							17*	18

El resto de la tabla se completa de la siguiente manera:

Números que sumados dan 9, esto es 1 menos que diez. Ellos son: $2+7$, $7+2$, $3+6$ y $6+3$.

Sumar 9 significa sumar 10 y restar 1. Por ejemplo: $9+3=13-1=12$. Estos números se ubican en la última fila y la última columna.

Las casillas restantes son sumas donde hay necesidad de descomponer un sumando, de tal manera que se obtenga una suma parcial de 10 y agregar la diferencia, por ejemplo: $7+4=7+3+1=10+1=11$.

Al final, la tabla queda completa para ser usada. Las cien combinaciones son las herramientas básicas de la suma y el niño debe saberlas todas.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Algunas ventajas de la tabla son:

1. Es compacta.

2. Puede ser usada para la resta.

3. Familiariza al estudiante para futuras ocasiones.

4. Facilita entender la estructura de nuestro sistema numérico y las propiedades de las operaciones.

Para entender el significado de expresiones como $3+2=5$ considere primero oraciones en el orden siguiente:

Tres niños y dos niños son iguales a cinco niños.

3 niños y 2 niños son 5 niños.

3 y 2 son 5.

$3+2=5$

Si hay dificultad con los símbolos regrese al material concreto cuantas veces sea necesario. Lo importante es descubrir las relaciones entre los números, y este conocimiento sólo se acentúa con la práctica.

4.4. La propiedad asociativa de la adición

Como una forma preparatoria para el algoritmo de la suma es necesario iniciar con la propiedad asociativa. El siguiente problema es un excelente preámbulo.

Paula y Carolina fueron al mercado. Paula compró en una tienda tres caramelos por 50 pesos, en otra compró un chocolate por 75 y una menta por 25. Carolina, por su parte, compró en la primera tienda tres caramelos por 50 pesos y un chocolate por 75 y en la segunda una menta por 25.

1. Exprese mediante una suma, en forma horizontal, la compra efectuada por Paula.
2. Exprese mediante una suma en forma horizontal la compra efectuada por Carolina.
3. Realice ambas sumas respetando el orden de pago.
4. Diga cuánto gastó cada una de las niñas.
5. Diga cuánto vendió cada tienda.
6. Justifique sus repuestas.

De la situación planteada en el problema se puede analizar que las dos niñas invirtieron la misma cantidad de dinero, pero que los gastos se distribuyeron de manera diferente: Paula gastó en la primera tienda 50 pesos y en la segunda 100, mientras que Carolina gastó en la primera tienda 125 y en la segunda 25.

Compra de Paula :

$$50 + (75 + 25) = 50 + 100 = 150$$

Compra de Carolina:

$$(50 + 75) + 25 = 125 + 25 = 150$$

Una forma compacta de resolver el problema anterior es:

$$\begin{aligned} 50 + (75 + 25) &= (50 + 75) + 25 \\ 50 + 100 &= 125 + 25 \\ 150 &= 150 \end{aligned}$$

Estudiemos ahora un problema fundamentado en las vivencias diarias:

En un taller de mecánica automotriz se va a reparar un carro. La reparación consiste, en su orden, en la reconstrucción del motor y el ajuste del sistema mecánico. Si Andrés trabaja solo, puede reparar el motor en 7 días mientras que Beto en compañía de Carlos toman 4 días en revisar el sistema mecánico. Por otra parte, Andrés y Beto gastan 5 días en la reparación del motor y Carlos demora 6 días en el sistema mecánico, trabajando solo.

Usando las iniciales de cada nombre:

1. Exprese mediante una igualdad la solución al problema si Andrés trabaja solo; y Beto y Carlos lo hacen juntos.

2. Exprese mediante una igualdad la solución si Andrés y Beto lo hacen en compañía; y Carlos trabaja solo.

3. De acuerdo con las respuestas anteriores exprese mediante una igualdad la verificación de la propiedad asociativa.

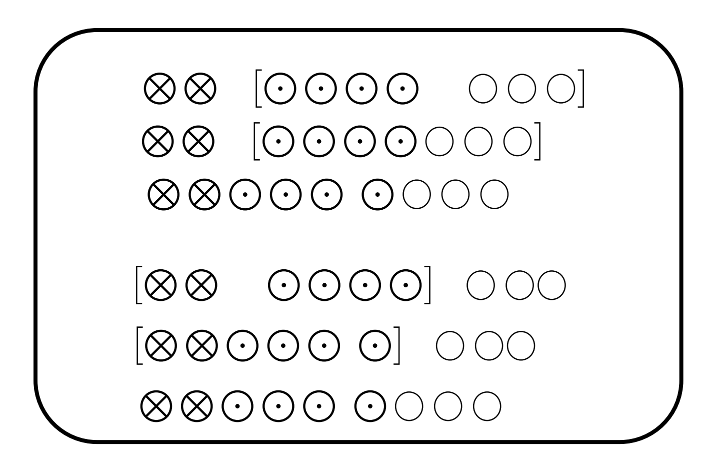
Las respuestas a los tres interrogantes se presentan en su orden así:

$$A + (B + C) = 7 + 4 = 11$$

$$(A + B) + C = 5 + 6 = 11$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Técnicamente hablando, es viable decir que la suma es una operación binaria; esto significa que para sumar se necesitan dos cantidades; si queremos sumar tres es necesario sumar dos y posteriormente agregar la tercera. Lo que establece la propiedad asociativa es que la forma como asociemos los sumandos no cambia el total. Usando material concreto:



4.5. La propiedad conmutativa de la adición

Esta propiedad es más difícil de entender. Algunos investigadores sostienen que debe enseñarse a partir de los ocho años, al igual que la propiedad asociativa. Para comprobar si el alumno está listo para la comprensión de la propiedad conmutativa se toma una hoja de papel y, por ejemplo, siete fichas azules de diferentes tamaños y cuatro amarillas también de diferentes tamaños. Se colocan en fila primero las azules y después las amarillas, de manera que ocupen todo el largo de la hoja. A continuación se retiran y se le pide al estudiante que coloque primero las amarillas y a continuación las azules. Cuando haya colocado todas las amarillas y una azul se le pide parar y se le pregunta si al terminar de colocar las azules las fichas llenarán el largo de la hoja, irán más allá o no alcanzarán a llenarla. El estudiante que no está preparado para la comprensión de la propiedad conmutativa responderá que irán más allá.

La propiedad conmutativa la desarrollamos así:

$5+4=(4+1)+4$	el 5 es igual a 4 + 1
$=4+(1+4)$	propiedad asociativa
$=4+5$	1 + 4 es igual a 5

Otro ejemplo:

$3 + 8 = 3 + (5 + 3)$	el 8 es igual a 5 + 3
$= (3 + 5) + 3$	propiedad asociativa
$= 8 + 3$	3 + 5 es igual a 8

Un tercer ejemplo:

$12 + 7 = (7 + 5) + 7$	el 12 es igual a 7 + 5
$= 7 + (5 + 7)$	propiedad asociativa
$= 7 + 12$	5 + 7 es igual a 12

Si usted es un maestro acucioso estará pensando que en la solución de los anteriores ejercicios se está haciendo uso velado de la propiedad que se quiere comprobar; note que la descomposición en dos sumandos se fundamenta en el estudio de las familias numéricas.

La propiedad conmutativa establece que el orden de los sumandos no altera la suma.

Con las ideas desarrolladas iniciamos la tarea de sumar números de dos dígitos. Antes que imponer soluciones o "un método" deje al estudiante en libertad de encontrarlas proponiendo sumas concretas. Por ejemplo: efectuar la suma $34 + 17$.

Una solución consiste en sumar 10 a 34 y después agregar 7, así: 34 más 10 es igual a 44; 44 más 7 es igual a 51.

Veamos lo que encierra el anterior proceso

$$\begin{aligned} 34 + 17 &= 34 + (10 + 7) \\ &= (34 + 10) + 7 \\ &= 44 + 7 \\ &= 51 \end{aligned}$$

Otra solución puede consistir en sumar las decenas y las unidades por separado y después volver a sumar: 30 más 10 es igual a 40, por su parte, 4 más 7 es igual a 11 y, finalmente, 40 más 11 es igual a 51.

Veamos la parte lógica de esta solución:

$$\begin{aligned}
34 + 17 &= (30 + 4) + (10 + 7)\\
&= (30 + 4) + (7 + 10)\\
&= 30 + (4 + 7) + 10\\
&= 30 + 11 + 10\\
&= 30 + 10 + 11\\
&= 40 + 11\\
&= 51
\end{aligned}$$

Una tercera solución consiste en “redondear” un número y después restar el excedente, por ejemplo: 34 más 20 es igual a 54 y 54 menos 3 es igual a 51.

El apoyo lógico es el siguiente:

$$\begin{aligned}
34 + 17 &= 34 + (20 - 3)\\
&= (34 + 20) - 3\\
&= 54 - 3\\
&= 51
\end{aligned}$$

La palabra algoritmo hace referencia a un procedimiento para resolver un problema. Los algoritmos básicos de la aritmética son los correspondientes a las operaciones con los enteros y en los colegios se siguen usando como única estrategia. a pesar de haber otros métodos eficaces. El cómputo mental es también un algoritmo y, como los tradicionales, se basa en el concepto del valor posicional de las cifras.

El algoritmo de la suma se fundamenta en la adición de los dígitos y se efectúa de derecha a izquierda, en el orden de las cifras de menor valor posicional. Por otra parte, al efectuar cómputos mentales se suman números y las operaciones se realizan de izquierda a derecha; por ejemplo, para sumar $256 + 369$ comenzamos con los cientos, o sea:

Doscientos más trescientos son quinientos.

Cincuenta más sesenta son ciento diez.

Quinientos más ciento diez son seiscientos diez.

Seis más nueve son quince, para un total de seiscientos veinticinco.

El cómputo mental es menos rígido y se acerca más a la realidad diaria. Piense que cuando cuenta dinero es más importante comenzar con los billetes de mayor denominación. Lo último que nos interesa contar son los centavos, incluso para los sistemas monetarios fuertes.

Una estrategia consiste en proponer cifras compatibles; esto es, terminadas en cero o en 5, o aquellas cuyas unidades sumen múltiplos de 10 y dejar que el estudiante desborde su ingenio usando las propiedades aprendidas, por ejemplo:

$$30 + 20 + 40 + 10 + 60$$
$$35 + 25 + 15 + 45 + 55$$
$$34 + 23 + 36 + 17 + 404$$

La importancia de la representación polinómica de los enteros radica en facilitar el entendimiento de la lógica inmersa dentro del proceso involucrado en el algoritmo de la suma, que al fin de cuentas es el objeto de esta operación. No se trata de declarar hostilidades en contra de los algoritmos; antes, por el contrario se busca racionalizarlos, es decir, ver con ojos claros la lógica en que se fundamentan para que no se conviertan en recetas sin sentido.

Atendiendo al anterior criterio, veamos un procedimiento para sumar enteros de dos dígitos, por ejemplo, $32 + 24$.

$$\begin{aligned}
32 + 24 &= (3 \times 10 + 2) + (2 \times 10 + 4) \\
&= 3 \times 10 + (2 + 2 \times 10) + 4 \\
&= 3 \times 10 + (2 \times 10 + 2) + 4 \\
&= (3 \times 10 + 2 \times 10) + (2 + 4) \\
&= 5 \times 10 + 6 \\
&= 50 + 6 \\
&= 56
\end{aligned}$$

En este proceso se han usado las propiedades asociativa y conmutativa.

Una forma alterna es:

$$\begin{array}{rl}
 & 3 \times 10 + 2 \\
+ & \underline{2 \times 10 + 4} \\
 & 5 \times 10 + 6
\end{array}$$

La siguiente forma nos acerca más a lo que buscamos. Se trata de establecer las identidades, $2 + 4 = 6$ y $30 + 20 = 50$ y posteriormente sumar los resultados parciales.

$$\begin{array}{r} 32 \\ +\ 24 \\ \hline 6 \\ 50 \\ \hline 56 \end{array}$$

Finalmente:

$$\begin{array}{r} 32 \\ +\ 24 \\ \hline 56 \end{array}$$

¿Pero qué sucede cuando la suma de las unidades es superior a 9? Este proceso se conoce como sumas "llevando". Por ejemplo, $34 + 18$.

$$\begin{array}{r} 3 \times 10 + 4 \\ +\ 1 \times 10 + 8 \\ \hline 4 \times 10 + 12 \end{array}$$

Reescribiendo $4 \times 10 + 12$ se obtiene $4 \times 10 + 1 \times 10 + 2$, lo que finalmente se escribe como $5 \times 10 + 2$, o sea 52.

También se puede operar de la siguiente forma.

$$\begin{array}{r} 34 \\ +\ 18 \\ \hline 12 \\ 40 \\ \hline 52 \end{array}$$

Finalmente:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 34 \\ +\ 18 \\ \hline 52 \end{array}$$

Por un tiempo es recomendable que la cantidad a "llevar", para este caso, el 1 (un grupo de diez) se escriba en la parte superior de la suma, así como el refuerzo oral que establezca que: cuatro más ocho es igual a doce, escribo dos

y llevo diez. Diez, más treinta, más diez son cincuenta. En total son cincuenta y dos.

Para sumar enteros de tres o más dígitos el proceso es similar, aunque la escritura polinómica de enteros de más de tres es de cuidado, teniendo en cuenta la dificultad para representar los cientos y los miles. Se espera que la madurez progresiva del estudiante y la guía del maestro resuelvan los inconvenientes que se puedan presentar. Es relevante resaltar la habilidad y el ingenio del docente en esta etapa. Por ejemplo, para sumar $357 + 268$ se procede así:

$$\begin{array}{r} 3 \times 100 + 5 \times 10 + 7 \\ + \underline{\; 2 \times 100 + 6 \times 10 + 8 \;} \\ 5 \times 100 + 11 \times 10 + 15 \end{array}$$

El resultado se puede reescribir como $5\times 100+(10\times 10+1\times 10)+(1\times 10+5)$, y teniendo en cuenta que 10×10 es igual a 1×100 y utilizando la propiedad asociativa se escribe en la forma: $6 \times 100 + 2 \times 10 + 5$, o sea, 625.

Una forma alterna es:

$$\begin{array}{r} 357 \\ + \underline{\; 268} \\ 15 \\ 110 \\ \underline{500} \\ 625 \end{array}$$

El apoyo oral se presenta de la siguiente manera:

Siete más ocho es igual a quince, cincuenta más sesenta es igual a ciento diez y trescientos más doscientos es igual a quinientos.

Finalmente:

$$\begin{array}{r} 11 \\ 357 \\ + \underline{\; 268} \\ 625 \end{array}$$

4.6. La diferencia

Desde el punto de vista de la sicología, la adición y la sustracción son un sistema único reversible; por esta razón los hechos básicos deben aprenderse simultáneamente. En el estudio de la familia del 6, por ejemplo, se estudian situaciones como la siguiente:

$$\square = 4 + 2$$

El correspondiente hecho de la sustracción es:

$$6 = 4 + \square$$

Lo que equivale a escribir:

$$6 - 4 = \square$$

Mirando con mayor detenimiento observamos que 4 es un miembro de la familia del 6, lo que es equivalente a decir que 4 es menor que 6. Para el caso se debe encontrar un miembro de la familia del 6 que sumado con 4 dé 6 como resultado, o si se prefiere, "un asociado del 4 por diferencia". Esto es:

$$6 = 4 + 2$$

Esto significa que a 4 le faltan 2 para ser igual a 6. Expresado en palabras equivalentes, la diferencia entre 6 y 4 es 2 o escrito en términos de diferencia:

$$6 - 4 = 2$$

Examinemos la diferencia entre 18 y 7. Al ser 18 mayor que 7, se debe encontrar el número que sumado con 7 dé 18. Como $18 = 7 + 11$, la diferencia es $18 - 7 = 11$.

Aunque la propiedad conmutativa indica que el orden en que sumemos dos números no cambia el resultado, para la diferencia el orden de presentación de los sumandos es de capital importancia. Mirando desprevenidamente las siguientes igualdades puede pensarse que no tiene relevancia el orden de los sumandos:

$$24 = 15 + 9$$

$$24 = 9 + 15$$

En este contexto las igualdades expresan situaciones diferentes. La primera es la diferencia $24 - 15 = 9$, mientras que la segunda es $24 - 9 = 15$. Cuando hablemos de diferencias debemos ser cuidadosos con el orden de la escritura.

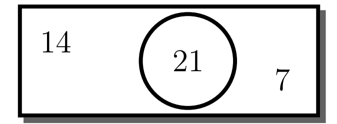
En términos generales se escribe:

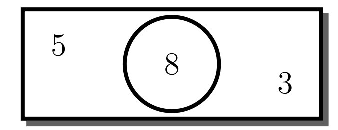
$$\text{Número mayor} = \text{Número menor} + \text{Diferencia}$$

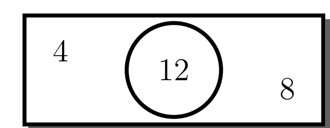
$$\text{Número mayor} - \text{Número menor} = \text{Diferencia}$$

Muchos estudiantes tienen dificultad para sumar o encontrar diferencias usando el cero. La idea generalizada es que al sumar las cantidades crecen y al restar disminuyen. Para obviar esta dificultad se deben incluir problemas donde uno de los sumandos o la diferencia sea cero. Lo que nunca se debe hacer es enunciar desde el comienzo una regla como la propiedad modulativa de la suma. La carga sicológica de esta propiedad es muy pesada para la inmadurez infantil. Para el maestro nada hay más natural, pero para el estudiante puede carecer de sentido, es mejor discutir ampliamente estos problemas. Con el tiempo la mente se abre al entendimiento.

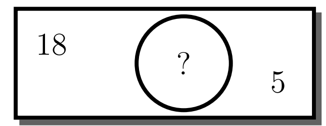
Extienda las familias numéricas a cantidades de dos cifras; por ejemplo, la familia del 32 son los números desde el 0 al 31. Dos números de esta familia que al sumarlos den 32 los vamos a denominar asociados por diferencia o simplemente asociados. Por ejemplo, 15 y 17 son asociados por diferencia porque $32 = 15 + 17$; por otra parte 13 y 19 también son asociados, y así sucesivamente. Una actividad consiste en presentar un determinado número dentro de un círculo y dos asociados y dejar que el estudiante encuentre la relación entre los tres; por ejemplo:

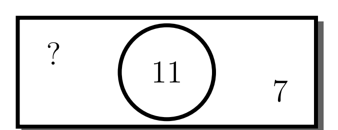




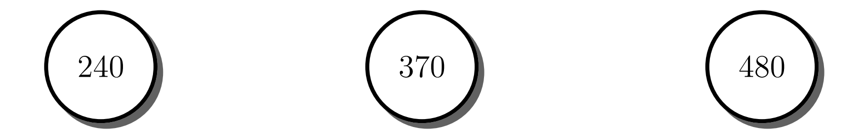


Después de descubrir la relación se proponen actividades similares, pero colocando interrogaciones en determinadas partes para que el estudiante escriba los números correspondientes, así:





Otra tarea preliminar consiste en escribir tres números; por ejemplo:



Con estos números proponga ejercicios como los siguientes y socialice las respuestas:

- ¿Cuáles son los dos números que se encuentran más cerca?
- ¿Cuál se encuentra más cerca de 300?
- Escriba un número que se encuentre entre 240 y 370, pero que esté más cerca de 370.
- Escriba un número mayor que los tres anteriores.
- ¿Cuán lejos está 500 de 240?

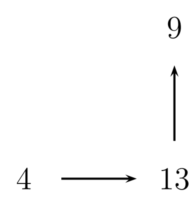
El siguiente es un ejercicio para consolidar la definición de diferencia:

Compare los números 42 y 28; y complete las siguientes igualdades:

$$42 = 28 + \square$$

$$42 - 28 = \square$$

Los hechos básicos de la sustracción se aprenden de la tabla de la suma al estudiar el problema de hallar el sumando perdido. Por ejemplo, de la igualdad $13 = 4 + \square$, busque el número 4 en la columna de la izquierda y en la correspondiente fila localice a la derecha el 13, suba por la columna y encontrará el 9.



+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										11
3									11	12
4								11	12	13
5							11	12	13	14
6						11	12	13	14	15
7					11	12	13	14	15	16
8				11	12	13	14	15	16	17
9			11	12	13	14	15	16	17	18

De la tabla de la suma se extrajeron treinta y seis entradas, de donde se derivan igual número de diferencias, que presentan dificultad al restar las unidades; estas comienzan con $11 - 2$ y terminan con $18 - 9$.

Si observamos las columnas de la tabla de las diferencias, nos damos cuenta que en cada una de ellas, las diferencias son idénticas y van disminuyendo en la unidad. En la primera columna esta diferencia es 9, en la segunda es 8 y finalmente, en la última es 2.

Tomemos por ejemplo, en la cuarta columna, la diferencia $15 - 9$; esta se puede resolver sumando tantas unidades al 9 hasta completar 15, en este caso 6. Otra solución consiste en establecer las igualdades: $15 - 9 = 16 - 10 = 6$.

11–2	11–3	11–4	11–5	11–6	11–7	11–8	11–9
12–3	12–4	12–5	12–6	12–7	12–8	12–9	
13–4	13–5	13–6	13–7	13–8	13–9		
14–5	14–6	14–7	14–8	14–9			
15–6	15–7	15–8	15–9				
16–7	16–8	16–9					
17–8	17–9						
18–9							

Todas las anteriores diferencias pueden resolverse usando una de las estrategias mencionadas, o haciendo uso de los dobles y los dobles cercanos, pero ellas no deben imponerse al estudiante, se presentan como opciones. Es mejor dejar que los escolares usen sus propios criterios.

4.7. El algoritmo de la resta

Enfrentamos el problema de encontrar diferencias entre enteros de dos dígitos, por ejemplo, $36-24$. Usando la expansión decimal el ejercicio se plantea así:

$$\begin{array}{r} 3\times 10+6 \\ -(2\times 10+4) \\ \hline 1\times 10+2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \text{ dieces } + 6 \text{ unos} \\ -(2 \text{ dieces } + 4 \text{ unos}) \\ \hline 1 \text{ diez } \quad + 2 \text{ unos} \end{array}$$

En la forma convencional:

$$\begin{array}{r} 36 \\ -24 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 \text{ menos } 4 \text{ es igual a } 2 \\ 30 \text{ menos } 20 \text{ es igual a } 10 \end{array}$$

Para dar solución a la diferencia $57-39$, basta con reescribir a 57 en la forma $4\times 10+17$ o 4 dieces más 17 unos y efectuar operaciones así:

$$\begin{array}{r} 4\times 10+17 \\ -(3\times 10+\ 9) \\ \hline 1\times 10+\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \text{ dieces } + 17 \text{ unos} \\ -(3 \text{ dieces } +\ 9 \text{ unos}) \\ \hline 1 \text{ diez } \quad +\ 8 \text{ unos} \end{array}$$

En la forma usual:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ \ 17} \\ 5\ 7 \\ -3\ 9 \\ \hline 1\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 17 \text{ menos } 9 \text{ es igual a } 8 \\ 40 \text{ menos } 30 \text{ es igual a } 10 \end{array}$$

Otro ejemplo: restar $823-425$. Para este caso se reescribe a 823 en la forma $7\times 100+11\times 10+13$ o 7 cientos más 11 dieces más 13 unos y se procede como en los anteriores casos.

$$\begin{array}{r} 7\times 100+11\times 10\ +13 \\ -(\ 4\times 100+\ 2\times 10\ +\ 5\ ) \\ \hline 3\times 100+\ 9\times 10\ +\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \text{ cientos } + \ 11 \text{ dieces } + \ 13 \text{ unos} \\ -(\ 4 \text{ cientos } + \ 2 \text{ dieces } + \ 5 \text{ unos}\ ) \\ \hline 3 \text{ cientos } + \ 9 \text{ dieces } + \ 8 \text{ unos} \end{array}$$

Usando la escritura convencional:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 7\ 11\ 13} \\ 8\ 2\ 3 \\ -4\ 2\ 5 \\ \hline 3\ 9\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{13 menos 5 es 8} \\ \text{11 menos 2 es 9} \\ \text{7 menos 4 es 3} \end{array}$$

Cuando hay ceros en el minuendo las restas se dificultan por la necesidad de escribir nueves en lugar de los ceros; por ejemplo:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 3\ 9\ 9\ 15} \\ 4\ 0\ 0\ 5 \\ -2\ 3\ 4\ 7 \\ \hline 1\ 6\ 5\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{15 menos 7 es 8} \\ \text{9 menos 4 es 5} \\ \text{9 menos 3 es 6} \\ \text{3 menos 2 es 1} \end{array}$$

Existe un método que consiste en agregar valor posicional a los dígitos del sustraendo en la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 4\ 0\ 0\ 5 \\ -2\ 3\ 4\ 7 \\ \hline 1\ 6\ 5\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{15 menos 7 es 8} \\ \text{10 menos 5 es 5} \\ \text{10 menos 4 es 6} \\ \text{4 menos 3 es 1} \end{array}$$

La justificación se basa en agregar la misma cantidad tanto al minuendo como al sustraendo. Para el caso anterior se sumó a ambas cifras mil ciento diez, distribuidos así: $10 \times 100 + 10 \times 10 + 10$.

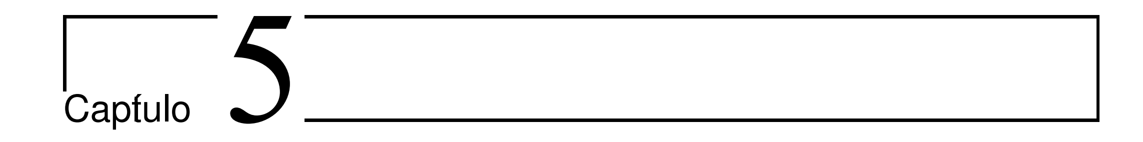
En estas condiciones, minuendo y sustraendo se reescribieron respectivamente en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 4 \times 1000 + 0 \times 100 + 0 \times 10 + 5 + (10 \times 100 + 10 \times 10 + 10) \\ = 4 \times 1000 + 10 \times 100 + 10 \times 10 + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \times 1000 + 3 \times 100 + 4 \times 10 + 7 + (10 \times 100 + 10 \times 10 + 10) \\ = 3 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 7 \end{aligned}$$

Al efectuar la resta:

$$\begin{array}{r} 4 \times 1000 + 10 \times 100 + 10 \times 10 + 15 \\ -(\ 3 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 7\ ) \\ \hline 1 \times 1000 + 6 \times 100 + 5 \times 10 + 8 \end{array}$$

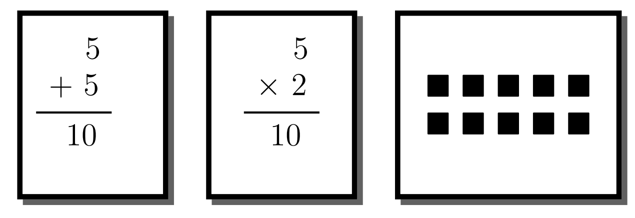


EL PRODUCTO Y LA DIVISIÓN

5.1. Clases de productos

Los investigadores sostienen que hay cuatro tipos de productos (Greer, 1992). El primero consiste en mirarlo como una suma reiterada donde los sumandos son iguales. El número que se va a sumar se denomina multiplicando y el número de veces que se sumará es el multiplicador. También se concibe al multiplicando como el número de elementos de cada conjunto y al multiplicador como la totalidad de dichos conjuntos. Por ejemplo, $6+6+6+6$ se interpreta como cuatro veces seis, cuatro conjuntos con seis elementos cada uno, cuatro por seis o el producto de cuatro por seis. El 6 es el multiplicando y el 4 el multiplicador.

Escribamos en forma vertical y comparemos la suma con el producto:



Si observamos el cuadro del centro nos damos cuenta que el número escrito debajo (2) indica el número de conjuntos y el superior (5) indica cuántos elementos tiene cada uno.

El segundo producto consiste en comparar dos conjuntos diferentes, donde uno de los dos es una repetición del otro un número determinado de veces (una copia múltiple del otro).

El tercer tipo es el producto cartesiano que consiste en combinaciones. Por ejemplo si se toma un sector de la ciudad comprendido entre 4 calles y tres carreras se tienen 12 posibilidades o combinaciones para ubicar una dirección por la nomenclatura calle-carrera.

El cuarto es el producto de medidas, lo que conduce al concepto de área. Con esta última visión, los números son usados para indicar segmentos pero tenga en cuenta las unidades de medida. En un rectángulo de 5 centímetros de largo por 3 de ancho el área no es de 15 centímetros, es de 15 centímetros cuadrados.

Los dos primeros tipos de producto son los discutidos más ampliamente en la primaria y los que abordaremos con detenimiento.

El producto y la división conservan la misma relación que la suma y la diferencia; por esa circunstancia se estudiarán al unísono. La mejor forma de introducir los conceptos de producto y división es a través de problemas especiales de suma y resta, los que al comienzo se resolverán mediante estas operaciones, pero posteriormente, cuando los conceptos de producto y división sean claros, se resolverán mediante estos últimos. No se debe forzar al estudiante a dar soluciones de acuerdo con el criterio de los adultos. Es difícil al principio pensar en términos de producto ya que en este concepto se introduce la idea de un conjunto amplio (singularidad) conformado por más de un conjunto con igual número de elementos (pluralidad). Por esta razón, desde segundo de primaria es conveniente proponer muchos problemas sencillos para sustentar las ideas encerradas en la multiplicación y durante tercero y cuarto años se irán graduando en dificultad.

Si se toma la idea de suma reiterada, un primer tipo de problemas consiste en dar un número determinado de grupos con igual cantidad de elementos para averiguar el total (problemas que se resuelven mediante sumas y son preparatorios para la multiplicación). De este tipo son:

José tiene 8 bolsas de naranjas. Si cada una tiene 5 naranjas ¿cuántas posee en total?

Si cada naranja cuesta 200 pesos ¿cuánto costarán 8 naranjas?

Antonio camina 2 cuadras por minuto. ¿Cuántas cuadras camina en 5 minutos?

Un segundo tipo consiste en dar un número determinado de subconjuntos y se desea conocer el número de elementos de cada uno. Estos problemas llevan a la división por partición. De esta naturaleza son:

José tiene 40 naranjas y las quiere repartir en 8 bolsas. ¿Cuántas naranjas habrá en cada bolsa?

Si 8 naranjas cuestan 1600 pesos, ¿cuánto costará cada una?

Antonio camina 10 cuadras en 5 minutos. ¿Cuántas caminará en 1 minuto?

El tercer tipo consiste en dar un número determinado de elementos para determinar cuántos subconjuntos disyuntos equinumerosos se pueden formar (problemas de división por medida). De esta clase son:

José tiene 40 naranjas y las repartió en bolsas con 8 cada una. ¿Cuántas bolsas usó?

José compró naranjas a 200 pesos cada una. ¿Cuántas compró con 1600?

Antonio caminó 10 cuadras a un promedio de 2 cuadras por minuto. ¿Cuántos minutos tardó en recorrer las 10 cuadras?

Si se toma la idea de comparación, una primera clase consiste en problemas donde el total es desconocido (producto desconocido). De esta clase conllevan a la multiplicación y son los siguientes:

Pedro tiene 7 naranjas y María posee cuatro veces más. ¿Cuántas tiene María?

En junio Teresa ahorró dos veces más que en mayo. Si en mayo ahorró 12000 pesos ¿cuántos ahorró en junio?

La segunda clase de problemas de esta naturaleza consiste en conocer el total y el número de conjuntos, desconociendo el número de elementos de cada uno. Estos problemas son de división por partición:

María posee 28 naranjas que son cuatro veces más que las que tiene Pedro. ¿Cuántas tiene Pedro?

En junio Teresa ahorró dos veces más que en mayo. Si en junio ahorró 18000 pesos, ¿cuánto ahorró en mayo?

En la tercera clase se desconoce el multiplicador. Estos son de división por medida:

María posee 28 naranjas y Pedro 7. ¿Cuántas veces más naranjas tiene María?

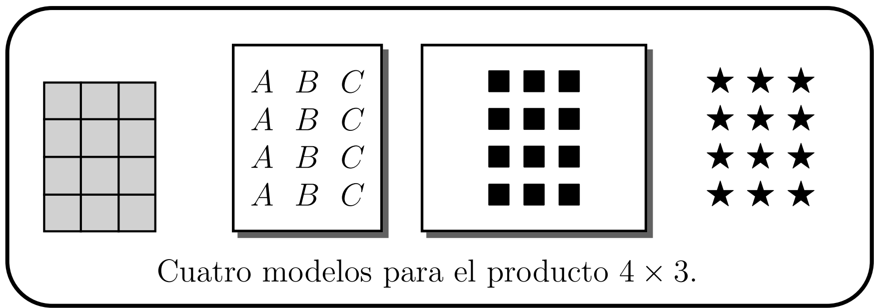
En junio Teresa ahorró 42000 pesos. Si en mayo ahorró solamente 7000, ¿cuántas veces más ahorró en junio?

Exprese mediante una división el presente arreglo:



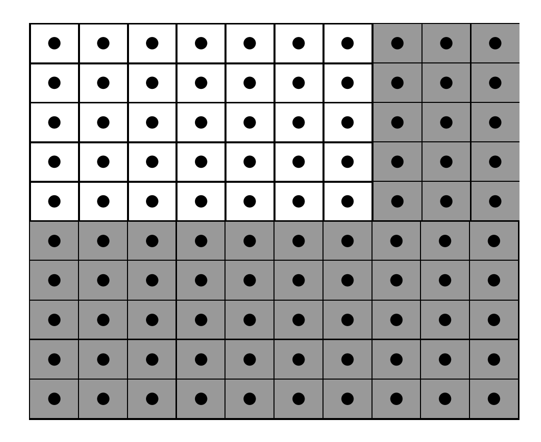
El uso de modelos es imprescindible para llegar a los conceptos. El siguiente es un modelo para el producto 5×5:





Cuatro modelos para el producto 4×3.

En un arreglo de 10 por 10 se pueden estudiar los productos de los números del 1 al 10. Tome un cartón previamente cuadriculado en 100 cuadros, dentro de los cuales se dibujaron círculos pequeños totalmente sombreados. Para representar un producto basta con tapar el área sobrante. La parte superior de la figura representa el producto 5×7.



Con la calculadora es factible encontrar la relación de la adición con el pro-

ducto. Instruya a los estudiantes para realizar productos usando la tecla "+". Por ejemplo 3×4 se calcula digitando: "+ 4 = = = ". Como en la memoria aparece el cero, las tres presiones de la tecla producen los números $4, 8, 12$. Con la misma técnica desarrolle productos mas largos; por ejemplo, 15×260 se calcula digitando "+260" y presionando la tecla "=" quince veces. También se puede efectuar la operación en dos etapas: Digitando "+260" y presionando la tecla "=" diez veces para obtener un resultado parcial; a continuación digitar "+260", presionando la tecla "=" cinco veces, para obtener un segundo resultado parcial. Finalmente sume los resultados parciales.

Los estudiantes deberán comparar resultados usando la tecla "×". Igual sucede con la división; por ejemplo, proponga el ejercicio de dividir 38 entre 14 de dos maneras diferentes sin usar la tecla de división y promueva discusiones alrededor de las soluciones correctas.

El paquete didáctico de Montessori para aprender matemática incluye un tablero para multiplicar con 81 cavidades, donde se pueden colocar bolitas u otros objetos pequeños. En la fila superior se escriben los números del 1 al 9 y en la columna exterior se ubica la fila de la tabla que se desea construir y se escribe el número correspondiente. La ilustración representa el producto 3×4. Una versión de este tablero es fácil de construir con material de bajo costo.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	O	O	O	O					
	O	O	O	O					
3	O	O	O	O					

5.2. La propiedad conmutativa del producto

No es obvio afirmar que, en general, el orden de los factores no cambia el producto. Por ejemplo, el producto 3×4 se representa por el arreglo siguiente:



Mientras que 4×3 se representa por:

★ ★ ★

★ ★ ★

★ ★ ★

★ ★ ★

Pero si gira el primer arreglo 90 grados se obtiene el segundo. La propiedad conmutativa asegura que la igualdad se produce en el resultado; esto es, en el producto. Es imprescindible que el estudiante construya modelos y los use para demostrar cómo girando uno se obtiene el otro. Debe quedar establecido que aunque $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$ y $4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$, al efectuar las sumas se obtiene 12 por resultado; esto es, dos diferentes multiplicaciones para el mismo producto.

Numéricamente se establece:

$$
\begin{aligned}
3 \times 4 &= 4 + 4 + 4 \\
&= 4 + 4 + (2 + 2) \\
&= 4 + 4 + 2 + 2 \\
&= (3 + 1) + (2 + 2) + (1 + 1) + 2 \\
&= 3 + (1 + 2) + (2 + 1) + (1 + 2) \\
&= 3 + 3 + 3 + 3 \\
&= 4 \times 3
\end{aligned}
$$

Otro ejemplo:

$$
\begin{aligned}
4 \times 6 &= 6 + 6 + 6 + 6 \\
&= (4 + 2) + (2 + 4) + (4 + 2) + (2 + 4) \\
&= 4 + (2 + 2) + (4 + 4) + (2 + 2) + 4 \\
&= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \\
&= 6 \times 4
\end{aligned}
$$

5.3. La propiedad asociativa del producto

En el uso de la propiedad asociativa el orden de los elementos no se cambia, aquí la idea es cómo proceder para multiplicar tres números. Las expresiones $2(3 \times 4)$ y $(2 \times 3)4$ son dos formas de establecer el producto de estos tres números. El problema es ver si estas dos expresiones conducen al mismo resultado. Desarrollemos cada una de ellas por separado:

$$\begin{aligned} 2(3 \times 4) &= 3 \times 4 + 3 \times 4 \\ &= (4 + 4 + 4) + (4 + 4 + 4) \\ &= 6 \times 4 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} (2 \times 3)4 &= (3 + 3)4 \\ &= 6 \times 4 \end{aligned}$$

La propiedad asociativa del producto establece que la forma de asociar tres números para multiplicarlos no cambia el resultado.

(♣♣♣♣ ♣♣♣♣ ♣♣♣♣) (♣♣♣♣ ♣♣♣♣ ♣♣♣♣)

$2(3 \times 4)$ dos veces [tres veces cuatro]

♣♣♣♣ ♣♣♣♣ ♣♣♣♣ ♣♣♣♣ ♣♣♣♣ ♣♣♣♣

$(2 \times 3)4$ seis veces cuatro

.

5.4. La propiedad distributiva

Se insiste en que el enunciado simbólico de las propiedades de las operaciones no es esencial para el conocimiento en los grados de primaria. La propiedad distributiva relaciona la suma con el producto y se le conoce como propiedad distributiva del producto con respecto a la adición, ya que lo que se distribuye, o parte, es el producto en dos o más sumandos. Su uso facilita el producto de

números de dos o más dígitos. El modelo que sigue ilustra cómo un producto puede ser repartido en dos partes. Se debe pedir al estudiante establecer las igualdades correspondientes.

▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲
▲	▲	▲	▲	▲	▲	▲

La tabla se ha dividido en dos regiones para representar la suma de los productos parciales, de donde se obtienen las igualdades:

$$\begin{aligned} 5 \times 7 &= 5(3+4) \\ &= 5 \times 3 + 5 \times 4 \end{aligned}$$

El uso de la propiedad distributiva para multiplicar por dos cifras se establece en el ejemplo a continuación, donde se realiza el producto 3×17.

$$\begin{aligned} 3 \times 17 &= 3(10+7) \\ &= 3 \times 10 + 3 \times 7 \\ &= 30 + 21 = 51 \end{aligned}$$

El mismo producto en forma vertical

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 3 \\ \hline 21 \\ 30 \\ \hline 51 \end{array}$$

Otra forma es:

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 3 \\ \hline 51 \end{array}$$

En esta última parte se debe verbalizar: tres por siete son veintiuno, escribo uno y llevo veinte; tres por diez son treinta, más veinte son cincuenta. Total, cincuenta y uno.

5.5. La tabla de multiplicar

La tabla de multiplicar, al igual que la de sumar, se debe construir para condensar las posibilidades de multiplicar por una cifra y usarla para dividir. Si bien tomar cero como producto es un hecho ineludible, al principio esta situación se puede aplazar de ser necesario. La tabla se escribe así:

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para confeccionar la tabla haga uso de algunas relaciones conocidas para encontrar otras, pero tenga presente que los modelos sirven para hallar estas relaciones y no para dar respuestas.

Contar en grupos puede ser una estrategia para llenar una fila. Teniendo en cuenta que 2×3 significa dos veces tres, mientras que 3×2 se interpreta como tres veces dos, es indispensable tener absoluta lucidez con relación a la propiedad conmutativa, lo cual permite la escritura de la mitad de la tabla. Hay 36 cuadros correspondientes a las dos primeras filas y a las dos primeras columnas que se llenan tomando a 0 y a 1 como factores.

Para completar la fila del 2 se hace uso de la relación aditiva del "doble", la del 4 no es otra cosa que "el doble de 2" y la del 8 se construye como "el doble de 4". La fila del 6 es la duplicación de la del 3. La del 5 se mira como la mitad del 10.

Tenga presente que multiplicar un número por 9 equivale a multiplicarlo por 10 y restar dicho número, y si el número es de una sola cifra la suma de los dígitos del producto es 9. Use estas dos relaciones para multiplicar por 9 procediendo de la siguiente manera: Réstele 1 a dicho número y escriba a continuación la cifra que complete 9; por ejemplo, para multiplicar 7×9 se resta 1 a 7, o sea 6 y acto seguido se escribe el 3, porque $6 + 3 = 9$, esto es, $7 \times 9 = 63$.

De forma similar, para el producto 5×9 se tiene $5 - 1 = 4$ y $4 + 5 = 9$, luego $5 \times 9 = 45$.

Las anteriores son algunas sugerencias de utilidad, pero son las estrategias sugeridas por el maestro y la imaginación fecunda de los estudiantes los artífices de la eficiencia del aprendizaje. Deje que el niño sea pródigo en estrategias.

Para operar mediante la tabla ubique el primer factor en la columna de la izquierda y el segundo en la fila superior; el producto se leerá en la intersección.

También puede ser usada para multiplicar por dos o más cifras, por ejemplo, 2×78. En la fila del 2 miramos las columnas encabezadas por 7 y por 8, allí encontramos 14 y 16, sumamos los dígitos del medio, esto es $4 + 1 = 5$; el producto es 156.

Si observa el procedimiento se dará cuenta que el producto se ejecutó de izquierda a derecha. La expresión $4 + 1 = 5$ equivale a sumar los dígitos de las decenas y el 1 del 14 corresponde a las centenas.

Para el producto 5×357 encontramos los números 15, 25, 35. Sumamos los números del medio, esto es, $5 + 2 = 7$, $5 + 3 = 8$. El resultado es 1785. La primera suma corresponde a las cifras de las centenas, mientras que la segunda es la cifra de las decenas. El 1 del 15 corresponde a las unidades de mil.

Una ayuda para multiplicar los dígitos del 6 al 9 y hallar los cuadrados de dichos números hasta el 10 consiste en construir un par de regletas numeradas del 6 al 10, como se muestra en la figura:

6
7
8
9
10

Para multiplicar haga coincidir las cifras correspondientes. Cuente los cuadros que quedan debajo de cada una de las regletas y multiplique el número de la izquierda por el de la derecha, este producto corresponde a las unidades. Para

hallar las decenas sume los cuadros de arriba incluyendo los seleccionados. Si el producto de las unidades es mayor que nueve, las decenas se agregan a la suma anterior.

Para multiplicar 6×7 haga coincidir los cuadros de estos números.

	6
6	7
	10
10	

Por debajo del 6 quedan 4 cuadros, mientras que debajo del 7 sobran 3. Dado que $4 \times 3 = 12$, la cifra de las unidades es 2 y sobra 1.

Por otra parte, al contar los cuadros superiores, incluyendo los de 6 y 7 sumamos 3; más 1 que sobró, son 4. En definitiva el resultado es 42.

La lógica se fundamenta en la noción del complemento de un número. Para el caso que nos ocupa, a 6 lo representamos como $10 - 4$ y a 7 como $10 - 3$. En estas condiciones se procedió así:

$$\begin{aligned} 6 \times 7 &= (10 - 4)(10 - 3) \\ &= 100 - 40 - 30 + 4 \times 3 \\ &= (100 - 70) + 12 \\ &= 30 + 12 \\ &= 30 + 10 + 2 \\ &= 42 \end{aligned}$$

5.5.1. El cero y el uno usados como factores y la imposibilidad de dividir por cero

Entender el comportamiento de cero y de uno como factores es tarea complicada para los noveles practicantes de la matemática, porque esta pareja se

desvía de la idea primaria del producto como una operación cuyo resultado es mayor que cada uno de los factores, lo que es bien cierto para los enteros positivos, mas no para otra clase de números como es el caso de los racionales. Lo cierto es que el cero anula al otro factor y el uno lo deja invariante.

Tome una cinta de medir y haga tres mediciones de cero metros; el resultado será cero metros, esto es, $3 \times 0 = 0$.

Si guarda la cinta sin efectuar ningún tipo de medidas habrá realizado cero mediciones de tres metros; esto significa que $0 \times 3 = 0$.

Con el uno establezca situaciones como: tres carros con una persona cada uno representa el modelo $3 \times 1 = 3$.

Un carro transportando tres personas no es otra cosa que $1 \times 3 = 3$.

Una situación similar se presenta con la imposibilidad de dividir por cero. Lo importante es que no enuncie mediante una regla esta imposibilidad; más bien proponga modelos que ilustren la situación. Por ejemplo, al dividir 3 entre 0 se debe obtener un cociente y un residuo. Supongamos que el cociente es 5 y el residuo es r. En este caso se puede escribir:

$$3 = 5 \times 0 + r$$

Dado que $5 \times 0 = 0$, necesariamente el residuo debe ser 3, de modo que la igualdad se reduce a:

$$3 = 5 \times 0 + 3$$

Pero la misma situación se presenta al tomar a 28 u otro entero como cociente. En síntesis: al dividir por cero cualquier cociente es bueno.

5.6. El algoritmo de la multiplicación

Para iniciar la multiplicación por dos cifras se deben proponer problemas que ilustren situaciones concretas como:

Si una bolsa contiene 35 naranjas, ¿cuántas naranjas contienen 4 bolsas?

Es obvio que la solución de este ejercicio consiste en efectuar el producto 4×35.

Siguiendo el proceso, veamos la solución del producto 34×12, en cuyo desarrollo, por ser ambos factores números de dos cifras, hay necesidad de aplicar la propiedad distributiva dos veces.

$$\begin{array}{rl} 34 & \\ \times 12 & \\ \hline 8 & 2 \times 4 \\ 60 & 2 \times 30 \\ 40 & 10 \times 4 \\ 300 & 10 \times 30 \\ \hline 408 & \end{array}$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{array}{rl} 34 & \\ \times 12 & \\ \hline 68 & 2(4+30) \\ 340 & 10(4+30) \\ \hline 408 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 12 \\ \hline 68 \\ 34 \\ \hline 408 \end{array}$$

La razón para correr el segundo sumando un lugar hacia la izquierda es por ahorrar la escritura del cero de 340: al escribir 34 corrido hacia la izquierda lo que en realidad se hizo fue sobreentender la existencia del cero.

Otro ejemplo para observar el algoritmo:

$$\begin{array}{r} 465 \\ \times 382 \\ \hline 930 \\ 3720 \\ 1395 \\ \hline 177630 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 2(5+60+400) & = & 930 \\ 80(5+60+400) & = & 37200 \\ 300(5+60+400) & = & 139500 \\ \hline & & 177630 \end{array}$$

Corriendo uno o dos lugares hacia la izquierda lo único que se logra es ahorrar la escritura de los respectivos ceros.

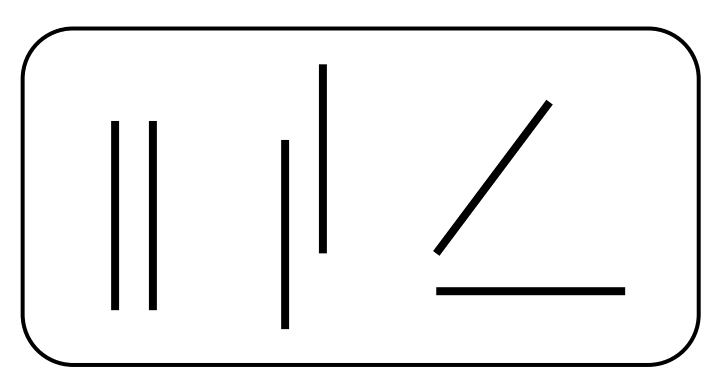
5.7. Medición

Generalmente se piensa que si un niño es capaz de identificar los números de una regla puede efectuar mediciones lineales, porque lo único que debe hacer es deslizar la regla sobre el objeto que va a medir y contar los números respectivos. Al nivel del pensamiento operacional la medición es mucho más que la lectura de números sobre una regla. En este proceso se involucra la conservación de la longitud que es un concepto lógico (del intelecto), y que en los menores entra en conflicto con lo que se ve.



Paula piensa que la altura del rectángulo es mayor que la del triángulo porque este último es la mitad del primero.

Para examinar si el escolar ha desarrollado este concepto se usan dos palillos de igual longitud. Colocados de diferentes maneras se pregunta cuál es más largo o si tienen igual longitud y se indaga por las razones de la respuesta.



Cuando se ha desarrollado el concepto de medición, la respuesta será que los palillos tienen igual longitud porque se pueden parear moviendo o girando uno de los dos.

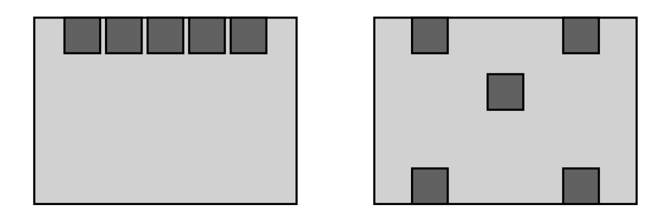
El estudiante no debe iniciar un estudio sistemático de la medición hasta después de haber asimilado la conservación de la longitud. Para estudiar la longitud se deben comparar cintas de diferentes colores y longitudes. Se pide señalar la más larga o la más corta de todas o entre dos de diferentes colores se pregunta por la más larga o la más corta. También se sugiere ordenarlas de mayor a menor y viceversa.



En Maloka, midiendo la presión de una columna de aire.

La conservación del área se adquiere más o menos al mismo tiempo. Para examinar este concepto se toman dos cuadrados iguales pintados de verde, diez cuadrados pequeños iguales, pintados de rojo, y una vaca de juguete. Se colocan los dos cuadrados verdes uno junto al otro y se pregunta dónde come más hierba la vaca. Se repite la pregunta hasta cuando quede claro que hay igual cantidad de hierba, superponiendo los cuadrados si es necesario.

Posteriormente se colocan cinco cuadrados rojos encima de cada uno de los cuadrados verdes. En el primero se colocan juntos y en el segundo se esparcen lo más posible.



Se advierte al estudiante que la vaca no puede comer en las áreas rojas. Pregunte a continuación dónde come ahora más hierba la vaca. La respuesta de los que carecen del concepto es que come más en el primero debido a que aparentemente posee más área verde.

La lógica indica que si a áreas iguales se le restan áreas iguales, la igualdad se conserva. Otra idea para examinar es la distancia entre dos objetos. Colocamos un tercer objeto entre dos previamente establecidos; si el menor piensa que la distancia ha cambiado o que el total cambia cuando se descompone en dos sumandos, no está listo para abordar problemas de medición.



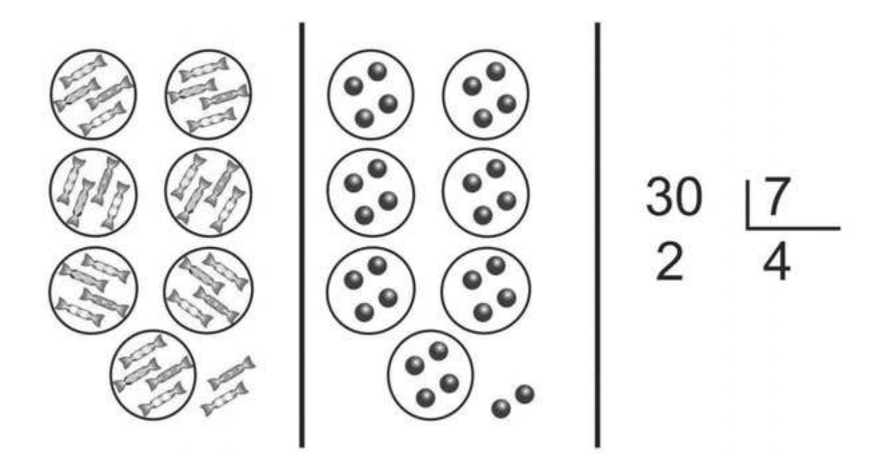
Para mostrar que el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo, Andrea une los dos triángulos para conformar un rectángulo congruente con el segundo.

Algunas actividades de medición pueden ser:

1. Usando su pie como unidad, hallar el largo del salón.
2. La distancia del pulgar al meñique es una cuarta. ¿Cuántas cuartas mide el escritorio? Compare con su compañero.
3. La distancia de la nariz a la punta del dedo del corazón es una yarda. ¿Cuántas yardas mide el tablero?
4. Medir el tablero en pies y en yardas; y establecer comparaciones entre las dos formas de medir. ¿Cuántos pies tiene una yarda?
5. Medir la circunferencia de un plato irrompible y explicar el proceso.
6. Usar una balanza para:
    a) Comparar el peso de un lápiz con el de un borrador.
    b) Comparar el peso de una moneda con el de una crayola.
    c) Ordenar los objetos pesados de mayor a menor y viceversa de acuerdo con el peso.
    d) Tomar una moneda y hallar un objeto que pese igual.
7. ¿Cuánto tiempo tardas en realizar las siguientes actividades?
    a) Desayunar.
    b) Ir de la casa a la escuela.
    c) Ver televisión.
8. Responda las siguientes preguntas:
    a) ¿A qué hora se oculta el Sol?
    b) ¿Qué cosa es más veloz que tú?
    c) ¿Qué cosa es más lenta que tú?
    d) ¿Cuál es el animal más lento y cuál es el más veloz?

5.8. La división

La división es una operación que ofrece mayor dificultad, quizás debido a la interpretación por parte del maestro y a la forma de realizarla de izquierda a derecha, contrario a las tres anteriores que se realizan en sentido inverso. Lo tradicional es que el maestro la presente exclusivamente como una repartición en partes iguales y resuelva indiscriminadamente todos los problemas que conduzcan a esta operación como si se tratara de repartir equitativamente, creando confusión.

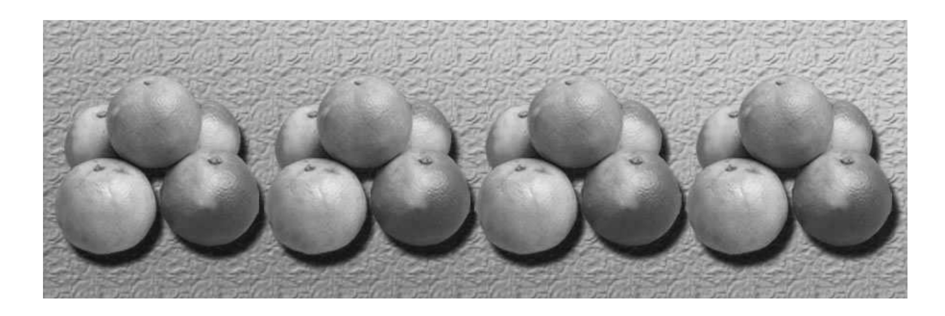


El concepto de división lleva implícito un proceso de generalización y abstracción progresiva que va de los objetos a los símbolos y de éstos al cálculo numérico.

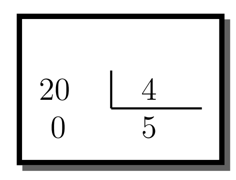
El problema de repartir equitativamente, por ejemplo, veinte naranjas en cuatro bolsas lo podemos visualizar como un problema de conjuntos en la siguiente forma: Tengo un conjunto con veinte elementos. Si deseo formar cuatro subconjuntos equinumerosos, disyuntos dos a dos, con todos los elementos, ¿cuántos elementos debe tener cada uno de ellos? Si lo miramos desde el ángulo del producto un problema equivalente se redacta así: Hallar el multiplicando si tengo el producto (20) y el multiplicador (4).

Otra forma de concebirlo consiste en dar un número determinado de grupos y desear conocer el número de elementos de cada uno, por ejemplo: Si 8 naranjas cuestan 1600 pesos, ¿cuánto costará cada una? Este problema es factible mirarlo como la forma de repartir equitativamente 1600 entre 8 e igualmente reunir 1600 elementos en 8 subconjuntos, disyuntos dos a dos, de 200 elementos cada uno.

Repartir 20 naranjas en 4 bolsas lo podemos representar así:



La operación formal o cálculo numérico propiamente dicho se desarrolla así:



El anterior tipo de situaciones se conoce como división por partición. El divisor representa el número de subconjuntos por formar (4) y el cociente es el número de elementos de cada uno de ellos (5). La solución consiste en formar cuatro subconjuntos disyuntos con cinco elementos cada uno.

La división por partición plantea el problema de la partición de un conjunto en clases de equivalencia. La partición de un conjunto no vacío es una operación matemática con las siguientes propiedades:

1. No hay subconjuntos vacíos.

2. Los subconjuntos o clases son disyuntos dos a dos; esto es, si un elemento pertenece a una clase no pertenece a la otra.

3. La reunión de los subconjuntos reproduce el conjunto dado.

4. Los subconjuntos son equinumerosos.

Haciendo referencia al problema de repartir veinte naranjas en cuatro bolsas afirmamos que:

1. No hay subconjuntos vacíos (cada bolsa contiene naranjas).

2. Los subconjuntos o clases son disyuntos dos a dos; es decir, si un elemento pertenece a una clase no pertenece a la otra (la naranja que se introduce en una bolsa no se introduce en otra).

3. La reunión de los subconjuntos reproduce el conjunto dado (la suma de las naranjas de cada bolsa es en total 20 naranjas).

4. Los subconjuntos son equinumerosos (cada bolsa contiene 5 naranjas).

En cuanto al problema de averiguar el precio de una naranja si ocho de ellas cuestan 1600 pesos notamos que:

1. No hay subconjuntos vacíos (cada naranja tiene su precio).

2. Los subconjuntos son disyuntos (el dinero con que se cancela es diferente).

3. La reunión de los subconjuntos reproduce el conjunto dado (en total se cancelan 1600 pesos).

4. Los subconjuntos son equinumerosos (cada una cuesta 200 pesos).

Al dividir un natural por 3, el residuo es alguno de los números 0, 1, 2, situación que nos lleva a agruparlos en tres subconjuntos, de acuerdo con el residuo que se obtenga al dividir. Estos se describen así:

$$[0] = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots, 3n + 0, \dots\}$$

$$[1] = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 3n + 1, \dots\}$$

$$[2] = \{2, 5, 8, 11, 14, \dots, 3n + 2, \dots\}$$

Vistos de este modo, los naturales se han partido en tres clases de equivalencia equirresiduales, para significar que en la primera se encuentran todos los números que al dividir por 3 dejan 0 por residuo, en la segunda los que dejan 1 y en la tercera los que dejan 2.

Una revisión cuidadosa permite deducir que ninguno es vacío, son disyuntos dos a dos y la unión de los tres contiene todos los naturales. Una lectura de arriba hacia abajo lo llevará a repasar la lista de todos ellos. Para demostrar que son equinumerosos hace falta ampliar el marco teórico, tarea que no se abordará por estar fuera del alcance de los objetivos planteados en este estudio.

Como se dijo anteriormente, otro tipo de situaciones consiste en dar un número determinado de elementos con el deseo de conocer cuántos subconjuntos equinumerosos, disyuntos dos a dos, se pueden conformar; estos problemas conducen al concepto de división por medida. En este caso se conoce la medida de cada subconjunto y se desea saber cuántos pueden conformarse. De esta naturaleza se pueden citar:

José tiene 40 naranjas y las repartió en bolsas, con 8 cada una. ¿Cuántas bolsas usó?

José compró naranjas a 200 pesos cada una. ¿Cuántas compró con 1600 pesos?

Antonio caminó 10 cuadras a un promedio de 2 cuadras por minuto. ¿Cuántos minutos tardó en recorrer las 10 cuadras?

Desde el punto de vista de los conjuntos, el primer problema se interpreta como la forma de saber cuántos subconjuntos resultan si un conjunto con 40 elementos se particiona en subconjuntos con 8 elementos cada uno. Si lo miramos como un producto, se trata de hallar el multiplicador (5) conociendo el multiplicando (8) y el producto (40). La solución formal es:

$$40 = 5 \times 8$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 5 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 40 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$

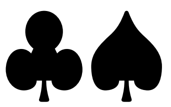
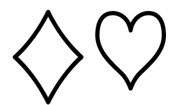
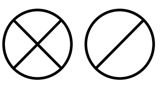
En el segundo problema se trata de saber cuántos subconjuntos resultan si un conjunto con 1600 elementos (pesos) se parte en subconjuntos con 200 elementos (pesos) cada uno. Este problema tal vez se pueda entender mejor si lo cambiamos por uno equivalente: José tenía 1600 pesos y los repartió entre varios compañeros, de manera que a cada uno le obsequió 200. ¿Cuántos son los amigos de José?

En la división por medida, el divisor representa el número de elementos que posee cada subconjunto y el cociente el total de subconjuntos obtenidos. Como las relaciones $40 \div 8 = 5$ y $40 \div 5 = 8$ son semejantes, recuerde que $40 = 5 \times 8 = 8 \times 5$, lo que es división por partición cuando el divisor es 8, es división por medida cuando el divisor es 5 y viceversa. La redacción del problema debe identificar el significado o qué tipo de división plantea.

El siguiente problema es del tipo división por partición: Una escuela tiene 600 alumnos y 30 salones. ¿Cuántos estudiantes debe haber por salón si cada uno debe tener la misma cantidad?

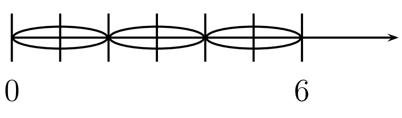
El siguiente problema es de división por medida: En una escuela hay 600 alumnos. ¿Cuántos salones se necesitan si cada uno debe tener 20 estudiantes?

Los menores deben aprender a trabajar primero con el material concreto. El arreglo siguiente es una representación de la igualdad $3 \times 2 = 6$; esto es, tres conjuntos de dos elementos.

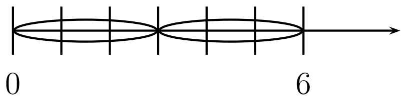
Se planta el problema: Si un conjunto de 6 elementos se particiona en subconjuntos de 2, ¿cuántos subconjuntos se forman? Se debe aprender a representarlo como $6 \div 2$, o mediante la expresión $\frac{6}{2}$ que se lee: ¿Cuántas veces está 2 en 6? ¿Cuántos subconjuntos disyuntos de 2 elementos hay en un conjunto de 6 elementos? (por medida), o también: Si 6 se separa en dos partes disyuntas, ¿cuántos elementos tiene cada una? (por partición).

La recta numérica ayuda a visualizar ambos aspectos de la división.





Por medida.

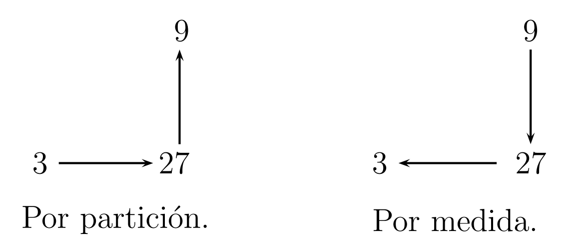


Por partición.

La primera pregunta se responde afirmando que hay tres subconjuntos con dos elementos cada uno, mientras que la segunda indica que cada uno de los dos subconjuntos debe poseer tres elementos.

5.9. La división como el inverso de la multiplicación

Si la división se introduce como el inverso de la multiplicación, esto es, hallando el factor desconocido, el niño se enfrenta a dos hechos. Por ejemplo, si $3 \times 9 = 27$, debe aprender a resolver las ecuaciones: $3 \times \square = 27$ y $\square \times 9 = 27$, estos problemas se solucionan al principio con la ayuda de la tabla, así:



Por partición. Por medida.

5.10. La división como una sustracción repetida

Una forma sencilla de introducir la división es a través de restas sucesivas. Si deseamos efectuar la división $21 \div 3$ podemos proceder así:

Se quiere saber cuántos subconjuntos de tres elementos, disyuntos dos a dos, hay en un conjunto que posea veintiuno (división por medida).

Puede haber $1, 2, 3, 4, 5, 6$ o más subconjuntos. Un buen número para iniciar es 4. Si hay cuatro subconjuntos con tres elementos cada uno, en total se tienen $4 \times 3 = 12$, por tanto $21 - 12 = 9$.

Como sobran 9, suponemos que hay otros dos, o sea $2 \times 3 = 6$, luego $9 - 6 = 3$, y este último resultado indica que hay un subconjunto más.

En conclusión, hay $4 + 2 + 1 = 7$ subconjuntos con tres elementos cada uno.

En forma condensada:

$$
\begin{array}{r|l}
21 & 3 \\ \cline{2-2}
-\,12 & 4 \\ \cline{1-1}
9 & 2 \\
-\,6 & \\ \cline{1-1}
3 & 1 \\
-\,3 & \\ \cline{1-2}
0 & 7
\end{array}
$$

Planteando soluciones más largas, o más cortas, el maestro debe hacer notar que todas son correctas, pero que hay una más corta, y por tanto más eficiente. La menos eficiente consiste en tomar de uno en uno hasta siete subconjuntos con tres elementos cada uno, mientras que la mejor plantea tomar de una vez los siete subconjuntos.

Este mismo problema debe replantearse en las siguientes formas:

¿Cuántos niños debe haber si se desea repartir veintiuna frutas de manera que a cada uno le correspondan tres? (división por medida).

Se quiere repartir en partes iguales veintiuna frutas entre tres niños y se desea saber cuántas le toca a cada uno (división por partición).

En forma equivalente:

Si se hace una partición de un conjunto de veintiún elementos en tres subconjuntos equinumerosos, ¿cuántos debe contener cada uno?

Usando el vocabulario apropiado, la solución es idéntica, SIETE.

Otro ejercicio se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r|l}
1482 & \;\;6 \\ \cline{2-2}
-\underline{1200} & \;\;200 \\
282 & +\,40 \\
-\underline{240} & \\
42 & \;\;\;\;7 \\
-\underline{42} & \overline{\;247\;} \\
0 & 247
\end{array}$$

El anterior procedimiento hay que transformarlo en una forma más apropiada; por ejemplo, al efectuar la división $896 \div 7$, proceda de la forma como se describe a continuación:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
800 & + & 90 & + & 6 & \;7 \\ \cline{6-6}
-\,700 & + & 100 & & & 100+20+8 \\ \cline{1-3}
\cancel{100} & & 190 & & & \\
& - & 140 & + & 50 & \\ \cline{2-5}
& & \cancel{50} & & 56 & \\
& & & & -56 & \\ \cline{4-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

A veces, como en el caso de $1482 \div 6$, es necesario reescribir el dividendo. Si se escribe $1482 = 1000 + 400 + 80 + 2$, la operación se desarrolla así:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
1000 & +400 & + & 80 & + & 2 & & \;6 \\ \cline{8-8}
-996 & + & 4 & & & & & 166+67+13+1 \\ \cline{1-3}
\cancel{4} & 404 & & & & & & \\
 & -402 & + & 2 & & & & \\ \cline{2-5}
 & \cancel{2} & & 82 & & & & \\
 & & & -78 & + & 4 & & \\ \cline{4-6}
 & & & \cancel{4} & & 6 & & \\
 & & & & - & 6 & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

La respuesta, a pesar de ser correcta, no es la más adecuada porque no es la mejor representación polinómica de 247. Observe que:

$$166 + 67 + 13 + 1 = 200 + 40 + 7 = 247$$

Ante esta circunstancia es necesario representar a 1482 se la forma

$$1482 = 1400 + 80 + 2,$$

A continuación proceda como sigue:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1400 & + & 80 & + & 2 & \;6 \\ \cline{6-6}
-1200 & + & 200 & & & 200+40+7 \\ \cline{1-3}
\cancel{200} & & 280 & & & \\
 & - & 240 & + & 40 & \\ \cline{2-5}
 & & \cancel{40} & & 42 & \\
 & & & & -42 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

El anterior proceso escrito en forma simplificada es:

$$
\begin{array}{r|l}
1482 & \;6 \\ \cline{2-2}
-12 & 247 \\ \cline{1-1}
28 & \\
-24 & \\ \cline{1-1}
42 & \\
-42 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Finalmente, se llega al algoritmo de la división en la forma usual:

$$\begin{array}{l|l} 14'8'2' & \ 6 \\ \cline{2-2} \ 28 & 247 \\ \quad 42 & \\ \quad\ 0 & \end{array}$$

Examinando esta última situación se observa que al separar el 14, lo que en realidad se toman son 1400 y el residuo 2 es 200. El 28 no es otra cosa que 280 y el 4 es 40 tanto en el cociente como en el residuo. En el residuo, al bajar el 2 se obtiene 42 y al final 7×6 es 42, que al ser restado produce una diferencia de cero en el residuo definitivo.



EL MATERIAL DIDÁCTICO

Después de haber asimilado la conservación de la cantidad y la reversibilidad del pensamiento el estudiante está preparado para iniciar el análisis de las operaciones usando material concreto. Con anterioridad se han mencionado las regletas de Cuisenaire, las barajas numéricas, el paquete didáctico de Montessori y el juego del dominó. En este capítulo se describen dos ayudas, la primera de las cuales es de mucha utilidad durante la primera fase del aprendizaje.

6.1. La balanza matemática



La balanza matemática más simple consta de una serie de pesos iguales, una cruz con un astil o eje graduado con agujeros, u otra clase de aditamento para colocar las unidades de peso, y una base de apoyo, cuya función es mantener

el astil en equilibrio. Es conveniente que en las primeras etapas no se escriban números en el brazo graduado, para evitar confusiones.

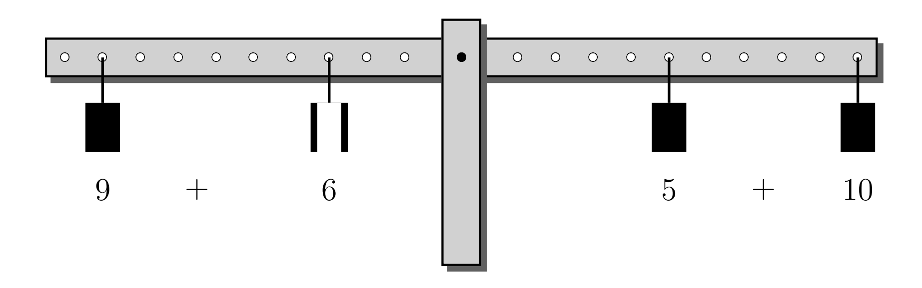
Fabricar una balanza es tarea fácil siempre y cuando tenga presente dos cualidades importantes, la fidelidad y la sensibilidad. La primera consiste en que debe mostrar los mismos resultados cuando se repite una misma operación y la segunda es la capacidad de reconocer las variaciones de peso.

Como la adición es una operación binaria se deben utilizar dos pesos en un extremo para equilibrar uno en el opuesto. Al estudiar la familia del cinco, por ejemplo, si en el brazo izquierdo se coloca un peso en el lugar correspondiente al 5, en el derecho se pueden ubicar uno en el 2 y otro en el 3, lectura correspondiente a la igualdad:

$$5 = 2 + 3$$

Dependiendo de lo que se quiera representar es posible utilizar más de un peso. En la figura se lee la expresión:

$$9 + 6 = 5 + 10$$



En el gráfico se usó el color blanco para resaltar que en el punto correspondiente al 3 se ubicaron dos pesos.

Los problemas de sustracción se plantean a través de encontrar el sumando perdido: por ejemplo la ecuación:

$$7 = 3 + \square$$

se soluciona colocando un peso en el lugar correspondiente al 7 en el brazo izquierdo y uno en el lugar de 3 en el derecho para proceder a continuación a

equilibrar la balanza, lo cual se logra ubicando en el brazo derecho un peso en el sitio correspondiente al 4.

Para los problemas de multiplicación, como en el caso de 3×5, se colocan en el brazo izquierdo tres pesos en el lugar del 5. Para equilibrar la balanza es necesario ubicar en la parte derecha un peso en en el 5 seguido de otro en el 10, o usar otra combinación cuyo total represente el 15.

Si representamos un número en uno de los brazos y lo queremos repartir entre un número menor, la solución consiste en saber cuántos pesos se deben ubicar en el otro brazo. Si en la parte izquierda aparece un peso en el 10 y otro en el 7, y en la derecha tres pesos en el 5 y uno en el 2, se establece la relación:

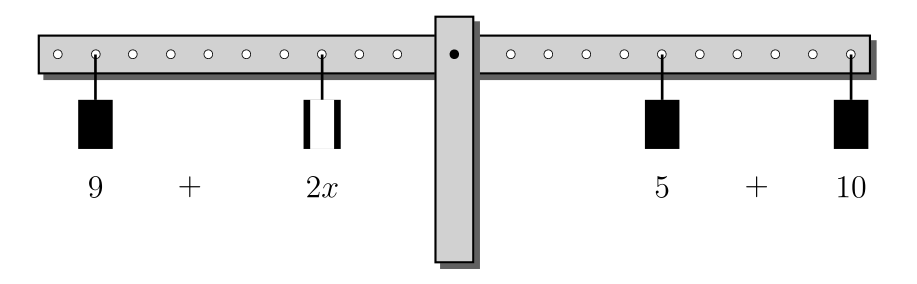
$$17 = 3 \times 5 + 2$$

lo que interpretado de acuerdo con el algoritmo de la división equivale a decir que 17 dividido entre 3 es igual a 5 y sobra un residuo de 2.

La habilidad del maestro es fundamental para orientar el estudio de las propiedades de las operaciones y muchas otras actividades. Para resolver la ecuación

$$2x + 9 = 15$$

Como se trata de buscar un número que al multiplicarlo por 2 y sumarle 9 sea igual a 15, comience representando en el lado derecho el número 15 y en el izquierdo el 9. El equilibrio se restablece al situar dos pesos en el punto correspondiente al 3 del brazo izquierdo para señalar que la solución es 3.



Si la ecuación es de la forma:

$$\frac{3x}{2} + 5 = 11$$

comience planteando una versión equivalente del problema, argumentando que si a la mitad de $3x$ le sumamos 5 la respuesta es 11, necesariamente si a $3x$ le sumamos 10 el resultado debe ser 22; e inicie la solución representando a la izquierda el 10 y a la derecha el 22.

Para hallar la solución de la ecuación:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

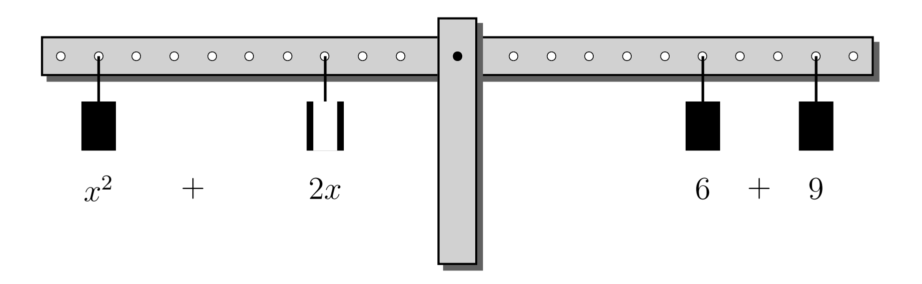
establezca la igualdad:

$$x^2 + 2x = 15$$

Si colocamos en el brazo derecho pesos cuya suma sea 15, por ejemplo, uno en el 6 y uno en el 9, el equilibrio se restablece de dos maneras:

1. Ubicando en el brazo izquierdo un peso en el 9 y dos en el 3, situación que corresponde a la expresión:

$$3^2 + 2 \times 3 = 15$$



De donde se concluye que 3 es una solución de la ecuación original.

2. Colocando en el brazo izquierdo cinco pesos en el 5 y en el derecho dos pesos en el 5, hecho que se interpreta mediante la expresión:

$$(-5)^2 = 15 - 2(-5)$$

La anterior expresión implica que -5 es solución de la ecuación equivalente

$$x^2 = 15 - 2x$$

La balanza es una magnifica ayuda para estudiar las propiedades de la adición y el producto, porque facilita la presentación de soluciones gráficas sencillas, incluso al resolver ecuaciones. Tiene el inconveniente de no poder operar con números mayores que 40 y por lo tanto solo es posible usarla para el estudio de las unidades y las decenas. En el caso anterior es más adecuado trabajar con el ábaco porque este último a la vez que ilustra los algoritmos permite extrapolar ideas que posibiliten el aprendizaje de sumas con cantidades superiores a 99.

6.2. El minicomputador de Papy



Alejandro investiga el concepto de factorización.

Frederique Papy desarrolló un método para enseñar las operaciones aritméticas a niños de seis años, basado en cuadrados de cartón u otro material resistente, divididos en cuatro regiones congruentes de colores blanco, rojo, púrpura y café y fichas de parqués. A este modelo que se ha denominado minicomputador de Papy.

Púrpura	Roja
Café	Blanca

El minicomputador se fundamenta en el hecho que todo número entero se puede escribir como sumas de potencias de 2. De acuerdo con esta apreciación se establecen las siguientes convenciones:

1. La región blanca representa al 1.
2. La región roja representa al 2.
3. La región púrpura representa al 4.
4. La región café representa al 8.

Con estas condiciones:

Para representar el 1 coloque una ficha en el área blanca.

Para representar el 2 coloque una ficha en el área roja.

Para representar el 3 coloque una ficha en el área blanca y una en el área roja ($3 = 1 + 2$).

Para representar el 4 coloque una ficha en el área púrpura.

Para representar el 5 coloque una ficha en el área blanca y una en la púrpura ($5 = 1 + 4$).

Para representar el 6 coloque una ficha en el área roja y una en el área púrpura ($6 = 2 + 4$).

Para representar el 7 coloque una ficha en el área blanca, una en la roja y una en la púrpura ($7 = 1 + 2 + 4$).

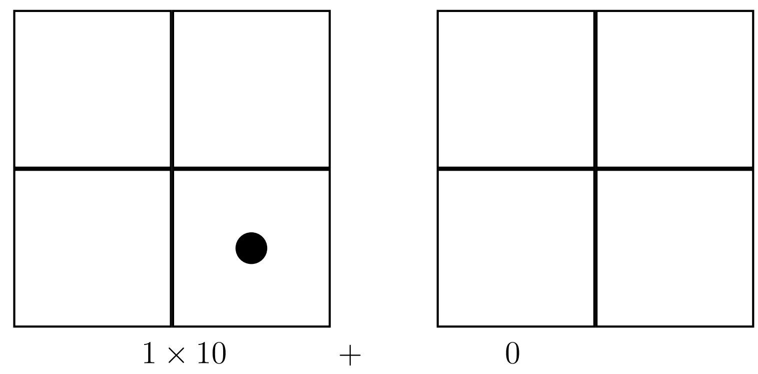
Para representar el 8 coloque una ficha en el área café.

Para representar el 9 coloque una ficha en el área blanca y una en el área café ($9 = 1 + 8$).

Para representar el 10, al principio se permite que los estudiantes coloquen una ficha en el área roja y una en el área café ($10 = 2 + 8$), mientras se encuentra una mejor opción.

Para los números del 1 al 9, las anteriores son las únicas representaciones correctas y serán usadas como los elementos de la base para escribir cualquier entero. Por su parte, el cero se representa con un cuadrado vacío.

Para representar cifras de dos o más dígitos se usan dos o más cuadrados, según el número de dígitos de la cifra a escribir. De acuerdo con lo anterior, el número 10 tiene una nueva representación en la forma:



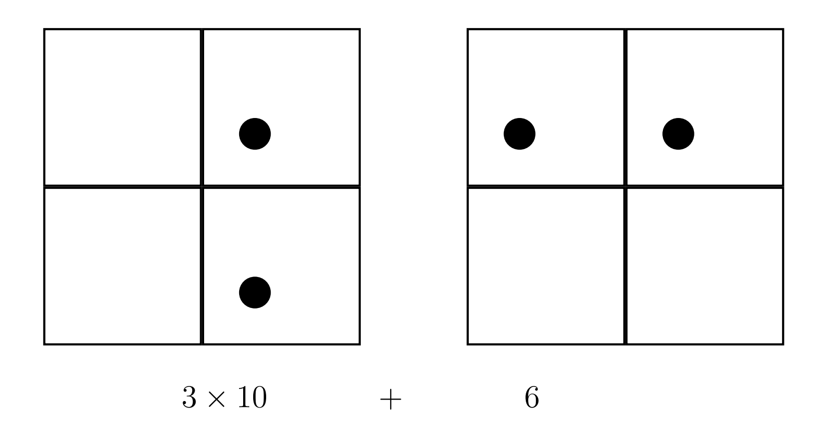
Se conviene además en las siguientes equivalencias:

Dos fichas en el área blanca equivalen a una en el área roja ($1 + 1 = 2$).

Dos fichas en el área roja equivalen a una en el área púrpura ($2 + 2 = 4$).

Dos fichas en el área púrpura equivalen a una en el área café ($4 + 4 = 8$).

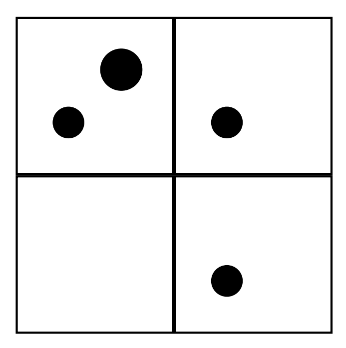
Siguiendo estas directrices, el número 36 se representa mediante el arreglo:



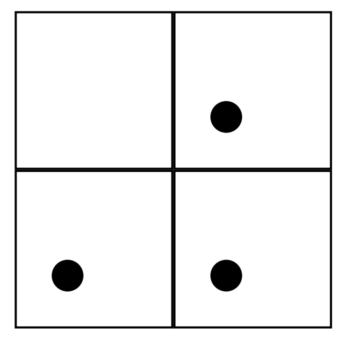
6.2.1. El minicomputador. La suma

Con el presupuesto anterior abordamos las operaciones aritméticas. Para sumar se representan los sumandos con fichas del mismo color, y mediante

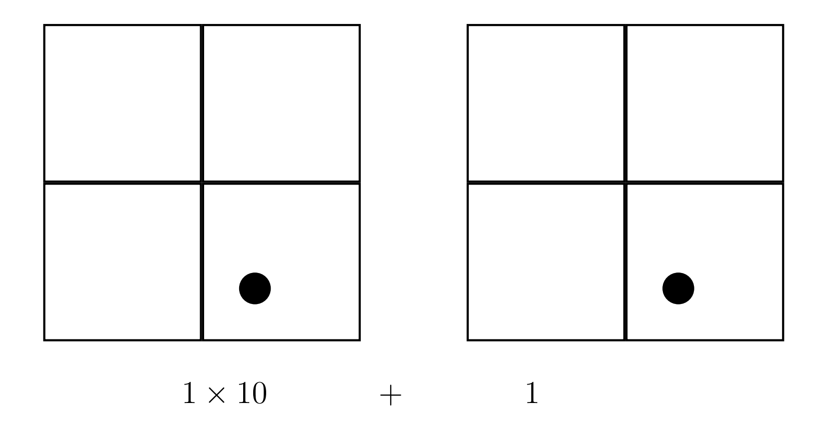
los parámetros establecidos, se debe encontrar una lectura correcta, la cual será la respuesta buscada. Para la suma $4 + 7$, por ejemplo, el 4 se representó con un círculo ligeramente mayor para diferenciarlo del 7, pero esta distinción no es necesaria.



Aplicando las reglas, las dos fichas de la región púrpura equivalen a una en la café.



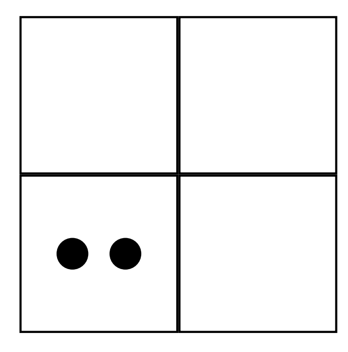
Las fichas de las áreas café y rojo, equivalen al número 10, por lo que se necesita un segundo cuadrado quedando el arreglo:



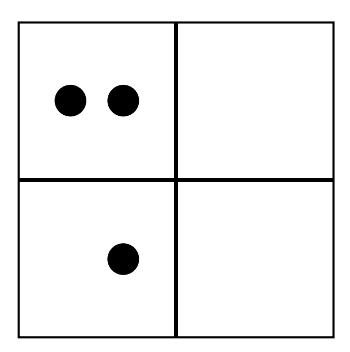
La parte formal se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 4+7 &= 4+(4+2+1) \\ &= [(4+4)+2]+1 \\ &= [8+2]+1 \\ &= 10+1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

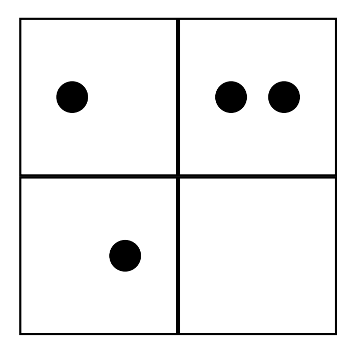
La suma $8+8$ se representa:



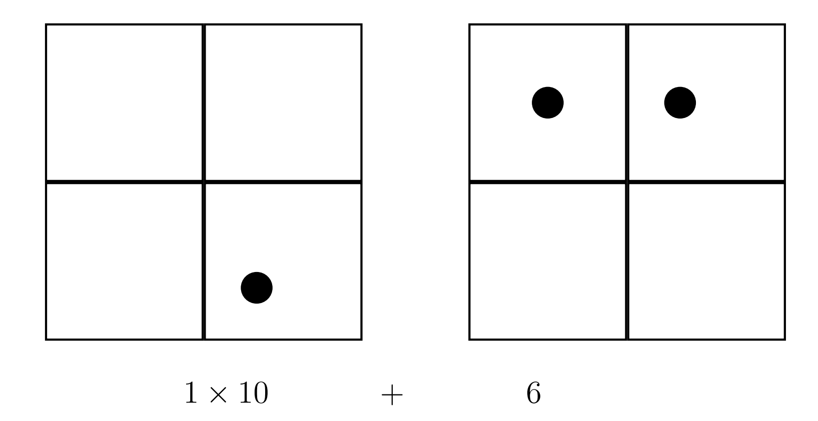
Una de las fichas en el área café equivale a dos en la púrpura.



Una de las fichas en el área púrpura equivale a dos en la roja.



Finalmente, la ficha del área café junto con la del área roja representan el número 10, quedando en definitiva:



$1 \times 10 \quad + \quad 6$

La parte formal no es otra que:

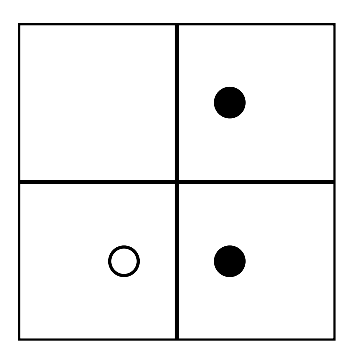
$$\begin{aligned} 8+8 &= 8+(4+4) \\ &= 8+[(2+2)+4] \\ &= (8+2)+(2+4) \\ &= 10+6 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento sumamos cantidades de dos cifras o más. Igualmente es posible realizar sumas con tres sumandos, pero esta última parte no es el objetivo principal de esta ayuda didáctica. Para que el minicomputador no se convierta en una rutina sin sentido es indispensable que el maestro oriente y estimule el proceso matemático formal involucrado en cada ejercicio. La idea principal es la aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa. El trabajo con el minicomputador tiene como propósito primordial llegar finalmente al entendimiento del algoritmo de la suma.

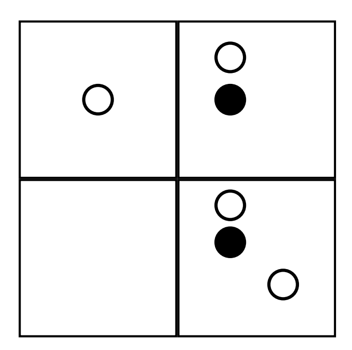
6.2.2. El minicomputador. La resta

Para restar se usan fichas de dos colores, uno para el minuendo y otro para el sustraendo. Teniendo presente que las fichas de diferente color ubicadas en una misma área se eliminan, el propósito es eliminar todas las del sustraendo. Al final solo deben quedar fichas del color del minuendo lo cual es obvio.

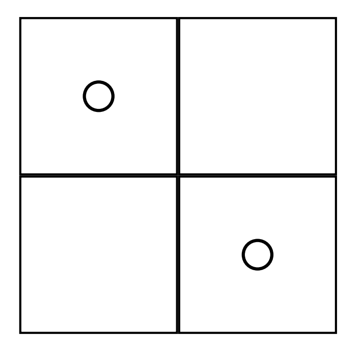
Para la diferencia $8-3$ representamos al 8 con el color blanco y al 3 con negro.



Si al 8 lo representamos como $4+2+1+1$ se obtiene la configuración:



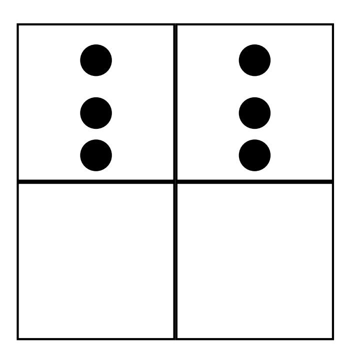
Levantando parejas de diferentes colores en las áreas blanca y roja, al final queda el arreglo correspondiente a 5:



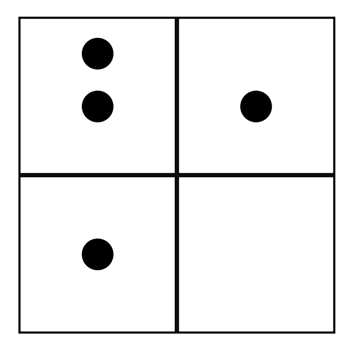
6.2.3. El minicomputador. El producto

Como el producto es una suma reiterada, para multiplicar se procede al igual que en la suma.

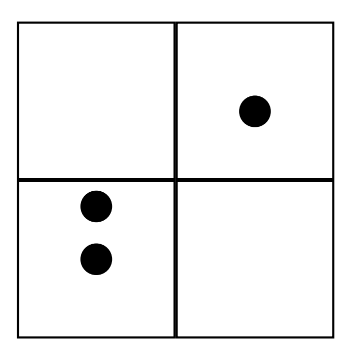
El producto 3×6 se representa mediante tres grupos de 6; y para hallar la solución basta con efectuar las sustituciones pertinentes para llegar a la representación del 18, para la cual necesitará dos cuadrados.



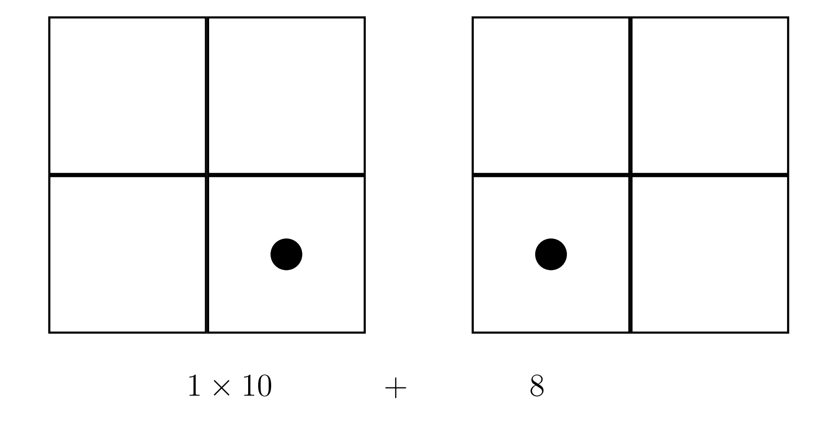
Los tres grupos de 6 se interpretan en principio como $4+4+4+2+2+2$ y estos a su vez son iguales a $8+4+4+2$.



Pero $8+4+4+2$ es equivalente a $8+8+2$.



Para finalmente llegar a $10+8$, o sea 18.

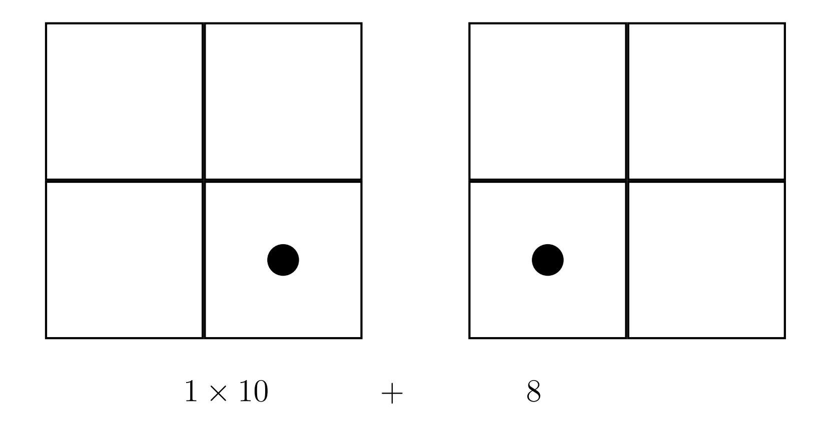


Para resolver productos con dos dígitos se debe usar la propiedad asociativa. Para el producto 20×12, como $20\times12 = (2\times10)\times12 = 2\times(10\times12) = 2\times120$ el problema se reduce a encontrar dos grupos de 120, para cuya representación se requieren tres cuadrados. La solución es idéntica a las anteriores.

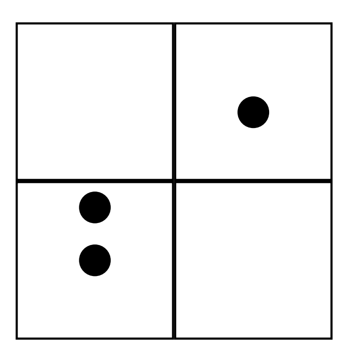
6.2.4. El minicomputador. La división

Dividir es el proceso contrario al producto. Se trata de encontrar cuántos grupos de un determinado número se pueden conformar con cierta cantidad o, en términos de la teoría de conjuntos, cuántos subconjuntos disyuntos con igual número de elementos es posible obtener de un conjunto con un número predeterminado de elementos.

Para dividir 18 entre 9 se debe averiguar cuántos grupos de igual número de elementos de pueden ubicar en las áreas café y blanca.



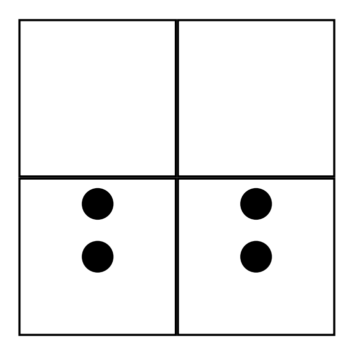
Partiendo del hecho de la escritura de 18 como $10 + 8$ se procede a escribir la siguiente representación:



Escribiendo a 10 como $1 + 1 + 8$ se concluye que:

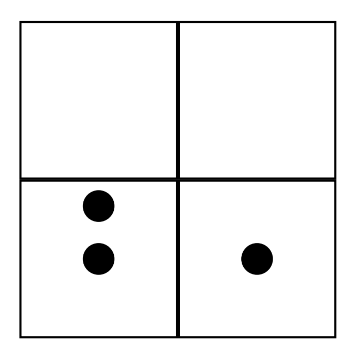
$$18 = 10 + 8 = 1 + 1 + 8 + 8$$

El último miembro de la igualdad permite llegar al arreglo que sigue.



En conclusión, con 18 se pueden conformar dos grupos de 9. Luego al dividir 18 entre 9 el cociente es 2.

Las divisiones donde haya lugar a residuos diferentes de cero se tratan de igual forma, pero en este caso el residuo se debe leer sin dificultad. El siguiente arreglo representa la división $17 \div 8$ donde se observa un cociente de 2 y un residuo igual a 1 (dos grupos de 8 y sobra 1).



Es conveniente aclarar que el trabajo con el minicomputador pretende ayudar a desarrollar en el alumno las habilidades necesarias para entender los procesos inherentes a las operaciones aritméticas y especialmente para estudiar el desarrollo polinómico de los enteros. En este sentido, su uso tiene la misma finalidad que el de las calculadoras electrónicas o cualquier instrumento didáctico. Se recomienda que el maestro se ejercite de tal manera que pueda resolver cualquier dificultad por parte de los estudiantes y el trabajo no se convierta en una rutina carente de sentido.

6.3. El duplo, una forma de multiplicar

Para tener una mejor idea del minicomputador veamos cómo es posible resolver todas las multiplicaciones usando únicamente la tabla del 2, método usado por los egipcios desde los tiempos del papiro de Rhind.

El proceso de doblar está basado en el hecho de que todo entero se puede escribir como sumas de potencias de 2. En la descripción del minicomputador se mostró cómo cada uno de los números del 1 al 10 se representan como sumas de estas potencias, recordando que 1 es igual a 2^0.

Veamos otros ejemplos:

$$\begin{aligned} 23 &= 1 + 2 + 4 + 0 \times 8 + 16 \\ &= 1 + 2 + 4 + 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 51 &= 1 + 2 + 0 \times 4 + 0 \times 8 + 16 + 32 \\ &= 1 + 2 + 16 + 32 \end{aligned}$$

El producto 42×12 se desarrolla así:

$$\begin{aligned} 42 \times 12 &= 42(0 + 0 + 4 + 8) \\ &= 42 \times 0 + 42 \times 0 + 42 \times 4 + 42 \times 8 \\ &= 0 + 0 + 168 + 336 \\ &= 504 \end{aligned}$$

El proceso anterior simplificado consiste en duplicar cada resultado a partir de 42 para obtener la secuencia 42, 84, 168, 336, y eliminar a 42 y 84 ya que 1 y 2 no aparecen como sumandos en el desarrollo de 12. Finalmente, basta con realizar la suma:

$$168 + 336 = 504$$

Para multiplicar 17×51:

$$\begin{aligned} 17 \times 51 &= 17(1 + 2 + 16 + 32) \\ &= 17 \times 1 + 17 \times 2 + 17 \times 16 + 17 \times 32 \\ &= 17 + 34 + 272 + 544 \\ &= 867 \end{aligned}$$

Se duplica cada resultado a partir de 17 para obtener la secuencia 17, 34, 68, 136, 272, 544 y se elimina a 68 y 136 ya que 4 y 8 no aparecen como sumandos en el desarrollo de 51. Finalmente se realiza la suma:

$$17 + 34 + 272 + 544 = 867$$

6.4. El método de Peasant

El proceso anterior tiene una variación conocida como El método ruso de Peasant y consiste en dividir sucesivamente uno de los factores por dos, ignorando los residuos hasta cuando se obtenga 1 por cociente y simultáneamente duplicar el otro. A continuación se eliminan los productos donde aparezcan números pares en el factor que se ha dividido y se suman los factores duplicados restantes. Aunque este método es más difícil de visualizar también se fundamenta en la escritura del factor dividido como una suma de potencias de 2.

Usando el método de Peasant el producto 17×51 se desarrolla de la siguiente manera.

$$17 \times 51$$
$$8 \times 102$$
$$4 \times 204$$
$$2 \times 408$$
$$1 \times 816$$

Al dividir 17 entre 2 se ignora el residuo 1. Como 8, 4 y 2 son pares se eliminan los productos 8×102, 4×204 y 2×408. Posteriormente se obtiene:

$$51 + 816 = 867$$

Note que los productos donde aparecen números pares corresponden a los ceros de la representación de 17, ya que $17 = 1 + 0 + 0 + 0 + 16$. La suma $51 + 816$ es equivalente a $51(1 + 16)$.

Mirandolo detenidamente, el método de Peasant es similar a encontrar la sucesión 51, 102, 204, 408, 816 y eliminar 102, 204 y 408 porque 2, 4 y 8 no pertenecen a la representación del 17.

Aunque los anteriores parezcan métodos molestos o poco prácticos son procedimientos ingeniosos y proporcionan una visión ampliada de la estructura del sistema de numeración decimal y la relación de este con el sistema de base 2.



LOS NÚMEROS RACIONALES

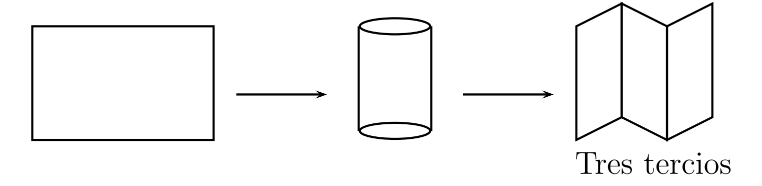
Desde un punto de vista matemático formal, un número racional es la relación o razón que existe entre una parte y el todo, mientras que una fracción es el símbolo usado para representar un racional determinado. A pesar de la distinción anterior en este contexto los términos racional y fracción serán utilizadas como sinónimos. Se debe partir del presupuesto que el concepto de número racional no es trivial, incluso para los primeros grados de la educación media. La tarea principal es ayudar al estudiante a construir la relación entre la parte y el todo y su representación simbólica.

Previamente el maestro debe resolver algunas inquietudes como las siguientes: ¿Qué tanto debe trabajar con las fracciones antes de iniciar las operaciones correspondientes? ¿Cómo aprenden los estudiantes a operar con fracciones sin usar los algoritmos formales? ¿Qué clase de modelos debe usar y cómo usarlos?

7.1. Modelos para la representación de los números racionales

Una vez más se resalta la importancia de los modelos en el aprendizaje. Una experiencia de primera mano consiste en doblar rectángulos o cuadrados de papel. Por ejemplo, al juntar los dos extremos de la hoja, doblar y separar nuevamente la ha dividido en dos partes iguales. Cada una de ellas se llama mitad y el total está conformado por dos mitades o medios. Continuando el proceso se puede dividir en cuatro y ocho partes, las cuales se denominan

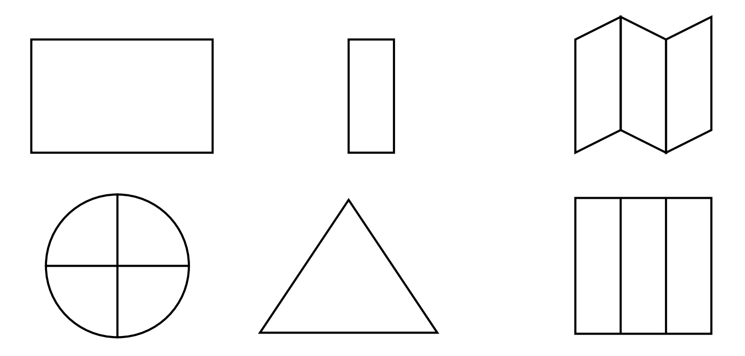
cuartos y octavos; así sucesivamente se puede seguir doblando en mitades de estas mitades. Por otra parte, tome una hoja y deslice un extremo sobre el otro, como si fuera a construir un cilindro, siga deslizando acortando el radio hasta cuando calcule que el extremo interior ha avanzado una tercera parte del camino (con un poco de práctica se logra), doble el papel y abra. Lo ha dividido en tres partes iguales o tres tercios, cada una de las cuales se nombra un tercio. A partir de esta división puede hallar sextos y doceavos doblando sucesivamente por mitades.



Antes de continuar debe tener presente que es necesario tener un punto de comparación; esto significa que no basta con tomar una determinada figura y asegurar que es una fracción o una parte sin mostrar otra que represente el todo. Otra relación importante para tener en cuenta es que cada una de las partes en que se ha dividido el todo deben ser exactamente iguales.

Los modelos deben ser usados a lo largo del aprendizaje de las fracciones para garantizar efectividad en la adquisición de este concepto. Se recomiendan tres tipos de modelos: áreas de regiones, longitudes y conjuntos. El paso de un tipo a otro representa, desde el criterio del estudiante, un cambio de actividad significante, por tanto sea precavido al usarlos.

A la primera categoría pertenecen las regiones circulares, triangulares, cuadradas y rectangulares, ya sean de papel, dibujadas o representadas con el geoplano. Las rectangulares tienen la particularidad de ser usadas también para representar enteros. Las siguientes son algunas de las más usadas.



La segunda clase se fundamenta en la idea de longitud de un segmento. Desde este punto de vista se puede trabajar con la representación de los enteros mediante una recta numerada. Las regletas de Cuisenaire consisten en regletas de diferentes tamaños que se utilizan para representar los números de 1 a 10 de la siguiente forma:

La blanca, que es la más pequeña, representa el 1.

La roja, cuya longitud es dos veces la blanca, representa el 2.

La verde claro, cuya longitud es tres veces la blanca, representa el 3.

La púrpura, cuya longitud es cuatro veces la blanca, representa el 4.

La amarilla, cuya longitud es cinco veces la blanca, representa el 5.

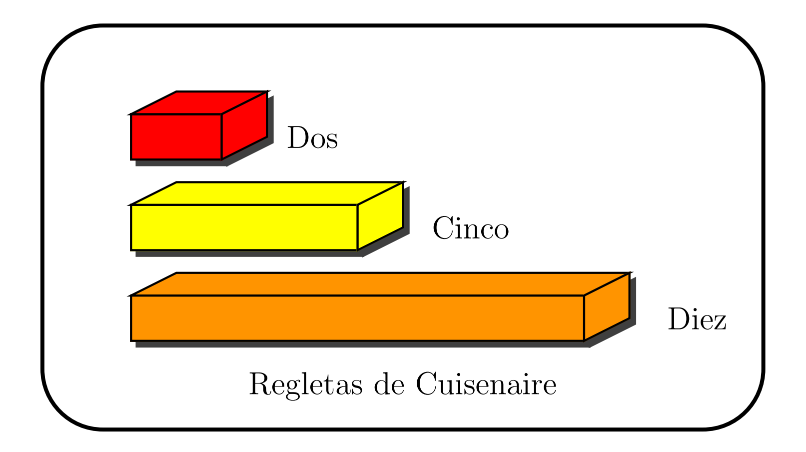
La verde oscuro cuya, longitud es seis veces la blanca, representa el 6.

La negra, cuya longitud es siete veces la blanca, representa el 7.

La café, cuya longitud es ocho veces la blanca, representa el 8.

La azul, cuya longitud es nueve veces la blanca, representa el 9.

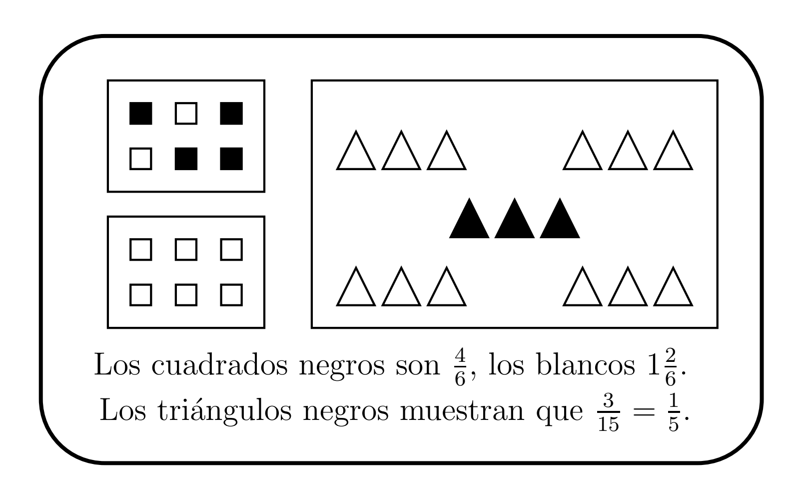
La naranja, cuya longitud es diez veces la blanca, representa el 10.



Regletas de Cuisenaire

Los modelos conjuntistas son una fuente pedagógica de gran caudal, excepto quizá en los primeros grados, porque permiten establecer situaciones de la vida diaria que tienen que ver con el uso de las fracciones. Por ejemplo, si

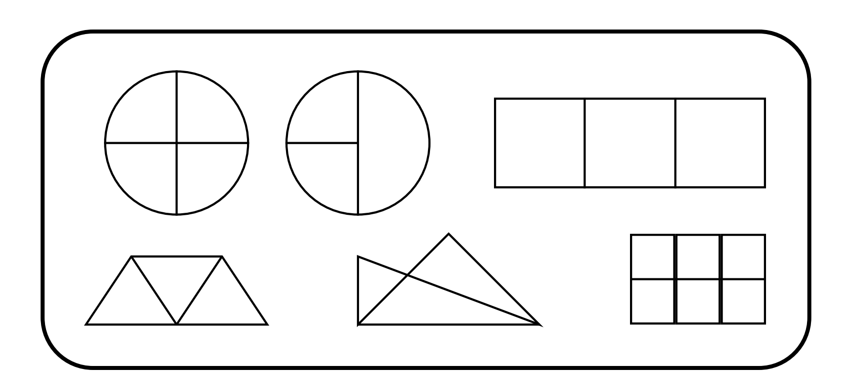
un conjunto tiene 15 elementos, 3 de ellos representan $\frac{1}{5}$ de dicho conjunto. Los modelos que se describen son apenas una idea de todo lo que se puede representar con los conjuntos.



Los cuadrados negros son $\frac{4}{6}$, los blancos $1\frac{2}{6}$.
Los triángulos negros muestran que $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

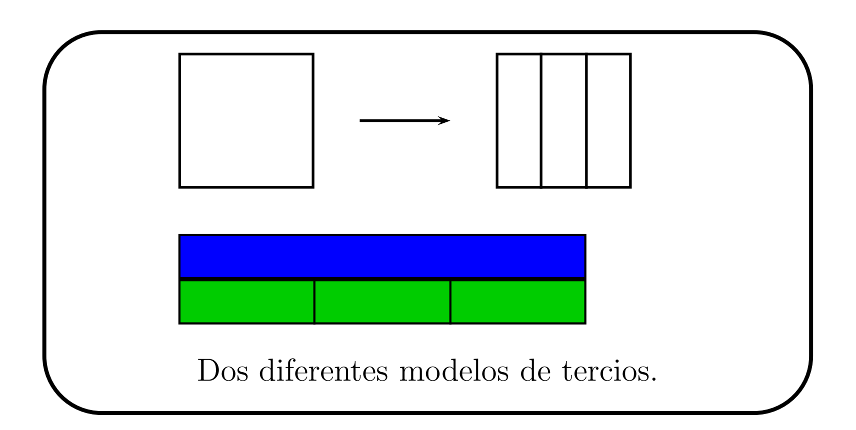
La idea primitiva que el estudiante aporta al concepto de fracción es la noción de dividir objetos en un número determinado de partes. Por ejemplo, un pastel para ser repartido en la fiesta de cumpleaños, dulces para compartir con los compañeros, y así sucesivamente. Esta idea debe reforzarse con el hecho de que las partes que se van a dividir deben ser exactamente del mismo tamaño.

En la figura siguiente algunas regiones se dividieron en tercios. Para los casos negativos analice si fueron divididas en partes iguales, y si lo fueron indique por qué no son tercios. Por otra parte, algunas, a pesar de haber sido divididas en tres partes, no son tercios; analice por qué no lo son.



La primera tarea es ayudar al estudiante a construir el concepto de fracción a través de la partición de un todo en partes de igual tamaño, pero esto no significa que deban tener la misma forma. Ser congruentes no es una condición necesaria para las fracciones. Tenga presente que si se divide en dos, las partes las llamamos mitades, si se divide en tres las denominamos tercios, y así sucesivamente se nombrarán cuartos, quintos, sextos, de acuerdo con el número de divisiones. Otra situación para resaltar es que el término "parte" no debe considerarse como representante de un elemento singular. Por ejemplo, un pastel dividido en 15 porciones iguales puede ser partido en 5 partes o quintos. En este caso se entiende que cada quinto está conformado por 3 porciones, mientras que cada porción representa un quinceavo del pastel.

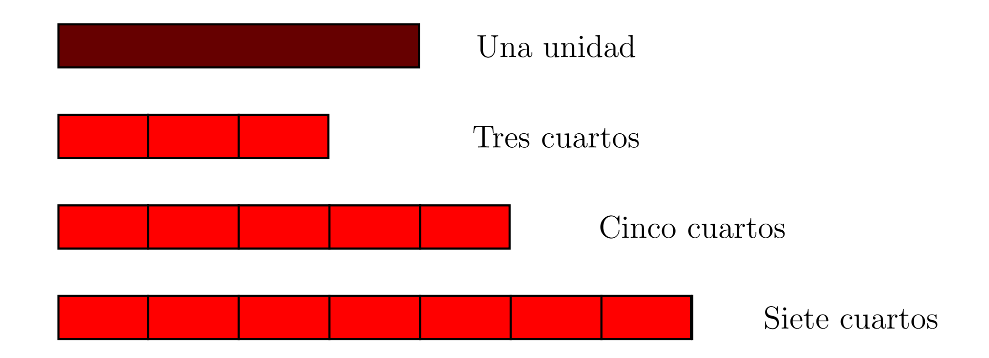
Al usar un determinado modelo su tamaño determina el tamaño de las partes. Por ejemplo, no es lo mismo, mirado desde el punto de vista del volumen, la mitad de una naranja que la mitad de una sandía. Lo mismo sucede si cambiamos de modelos. Si la unidad se representa con una regleta azul, una verde claro representará un tercio de esa unidad, pero si la unidad viene dada por una regleta verde claro, una blanca indicará un tercio.



Dos diferentes modelos de tercios.

A medida que se reconocen las fracciones como partes iguales de un todo, la tarea de nombrarlas y contarlas se simplifica; y se convierte en rutina denominarlas mitades, tercios o cualquier otro nombre y por tanto se puede hablar de tres cuartos o cuatro quintos, con la naturalidad con que se mencionan los enteros. Expresiones mayores que la unidad, tales como ocho quintos, surgen con la misma naturalidad. Es recomendable el uso de los nombres mediante las palabras correspondientes antes de iniciar la representación simbólica.

Teniendo plenamente establecido que una regleta roja es una cuarta parte de una café se pregunta cuántas rojas se necesitan para igualar la longitud de esta, deduciéndose que la unidad se puede dividir en cuatro cuartos. De igual forma tres rojas no alcanzan para igualar la longitud de una café, cinco la sobrepasan y siete son tres cuartos más que una café.



7.2. El significado de número fraccionario

El sentido de la proporción en la mente infantil indica que hay "más cantidad" a medida que el número es mayor. Trasladando esta idea a las fracciones piensa que como cuatro es mayor que tres, necesariamente un cuarto es mayor que un tercio. No tiene sentido hablar de la relación inversa que establece que si un número es mayor que otro, los inversos cambian la relación.

Para lograr el desarrollo de la relación inversa mencionada en el párrafo anterior se debe iniciar proponiendo un listado de fracciones tales como:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Luego pedir que sean ordenados de menor a mayor justificando el ordenamiento a través de modelos. Insista en que a medida que se divide el entero en un número mayor de partes, estas se reducen en tamaño. Otro ejercicio consiste en tomar un fraccionario como $1\frac{1}{5}$ y solicitar que sea escrito en formas diferentes como sumas de dos sumandos, por ejemplo, $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}$.

El maestro tiene la libertad de sugerir el uso o no de modelos. La forma de escribir estas sumas varía de niño a niño y con la edad. Proponga que la

escritura se realice con otro tipo de denominadores, por ejemplo, $\frac{9}{10} + \frac{3}{10}$. También con denominadores diferentes, esto es, $\frac{3}{5} + \frac{6}{10}$. Hay una variedad de oportunidades de encontrar patrones y relaciones entre los fraccionarios. El maestro puede dar uno de los sumandos y dejar en libertad de encontrar la forma de determinar el otro. Los estudiantes tal vez no piensen en hallar respuestas a través de realizar sustracciones, pero lo que es cierto es que usarán sus propios conceptos para presentar soluciones.

Tomando como punto de partida el 1 invite a los estudiantes a escoger una fracción menor que dicho número pero cercana a él y a continuación elegir otra más cercana justificando la escogencia. Continúe el ejercicio con la elección de fracciones cada vez más cercanas a 1. de forma similar se deben tomar fracciones mayores que 0 pero cada vez más cercanas a este último número. Al principio puede basar los argumentos en modelos, pero a medida que transcurra el tiempo deben ser de tipo lógico. Centre la discusión en cómo las fracciones se van tornando mayores o menores a medida que nos acercamos al 1 o al 0, respectivamente. Como toda fracción mayor que 1 es posible escribirla a partir de un entero más una fracción menor que 1 los ejercicios descritos facilitan la ubicación de cualquier fraccionario y por tanto su significado. Los dos ejemplos que siguen ilustran lo expuesto anteriormente.

$$\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{19}{20}, \frac{24}{25}, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots$$

Es indudable que existen reglas para determinar la relación de orden entre los fraccionarios, pero recuerde que el objetivo es inculcar el pensamiento reflexivo antes que la adquisición de habilidades para desarrollar los algoritmos. Si el estudiante aprende las reglas para operar es obvio que podrá obtener respuestas acertadas, pero tal vez esté sacrificando el verdadero entendimiento acerca del significado de las fracciones y la relación de orden en este conjunto.

Los ejemplos que se presentan a continuación son algunos ejercicios que pretenden ayudar a entender los conceptos de fracción, numerador y denominador. Los modelos se usan para representar enteros o fracciones. Se puede usar cualquier tipo y tamaño de modelo.

1. Si un rectángulo de seis centímetros de base por dos de altura representa la unidad, dibujar los tres medios.

2. Si seis elementos son los dos tercios de un conjunto, ¿cuántos elementos tiene el conjunto entero?

3. Si un cuadrado de cinco centímetros de lado es un tercio, ¿cómo será la unidad?

4. ¿Qué relación hay entre un cuadrado de seis centímetros de lado y un rectángulo de tres centímetros de base por dos de altura?

Ha debido quedar establecido que los términos numerador y denominador no son lo más importante para el conocimiento de las fracciones. Son suficientes las expresiones cantidad superior y cantidad inferior para nombrarlos, al menos durante los primeros grados. Algunos maestros piensan que se debe comenzar usando los nombres apropiados; lo pertinente al respecto es decir que los nombres pueden ser expresiones cualesquiera que lo fundamental son las ideas. Formalmente el denominador indica el número de partes en que se ha dividido el todo, mientras que el numerador significa las partes que se han seleccionado.

Los modelos más efectivos son los que se extraen del mundo físico. Se debe tener cuidado de confeccionar preguntas que puedan ser respondidas con el modelo. Para el efecto tenga el cuidado de escoger previamente uno adecuado al tipo de pregunta que quiera proponer. Presente el ejercicio a la clase para observar cómo los estudiantes interpretan la tarea. Los problemas más fáciles son aquellos que involucran fracciones con numerador igual a la unidad; los más difíciles son los que tienen que ver con mixtos porque deben ser convertidos a fracciones impropias.

Tome los siguientes pares de fracciones y, sin usar los conceptos de fracciones equivalentes, denominadores comunes o producto de extremos por medios, seleccione la mayor de cada pareja. Presente dos o tres razones que justifiquen su escogencia:

1. $\frac{3}{7}, \frac{3}{9}$

2. $\frac{4}{5}, \frac{7}{5}$

3. $\frac{8}{3}, \frac{8}{5}$

4. $\frac{3}{4}, \frac{7}{6}$

Del primer ejemplo se observa que al dividir en 7 partes iguales las fracciones deben ser mayores que cuando se divide en 9, y si de cada forma de dividir tomamos tres, el primer fraccionario será mayor que el segundo. Del segundo se concluye que el primer fraccionario es menor que la unidad mientras que el segundo es mayor, por tanto el segundo fraccionario es mayor que el primero. Del tercer ejemplo se infiere que el primer fraccionario está más cerca de 3 que el segundo por consiguiente es mayor. El cuarto ejercicio es semejante al segundo.

7.3. Fracciones equivalentes

Si una hoja de papel se divide en dos partes iguales se obtienen dos medios o mitades. Si una de estas mitades se divide en dos partes iguales, se obtienen dos cuartos de la unidad inicial. Si la mitad se divide en tres partes iguales, se han tomado tres sextas partes de la unidad primitiva. Se puede continuar el proceso de división obteniendo cuatro octavos, cinco décimos y así sucesivamente, lo que induce a pensar que:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

Y hasta aquí el papel quizás no resista más divisiones, aunque en la realidad matemática el número de éstas es infinito, como lo es también el conjunto de fracciones equivalentes. ¿Qué significado tiene la expresión $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$? Algunas respuestas pueden darse en los siguientes términos:

1. La primera fracción es la segunda simplificada por 2.

2. Si se tiene un conjunto con 4 elementos y se toman 2, en total se ha tomado la mitad del conjunto.

3. La segunda fracción es la primera multiplicada por 2.

4. Si la mitad de un rectángulo se divide en 2 partes iguales, dicha mitad corresponde a 2 cuartas partes del original.

Las razones anteriores han sido expuestas desde dos puntos de vista: uno de procedimiento (1 y 3) y el otro a través del concepto (2 y 4). Se insiste en que el estudiante no debe usar reglas antes de saber su real significado.

Desde el ángulo del concepto se dice que dos fracciones son equivalentes si representan el mismo número, es decir; son nombres diferentes de un mismo fraccionario. El conjunto que contiene a todas las fracciones equivalentes con una determinada se conoce como la clase de equivalencia de dicha fracción y cada uno de sus elementos se dice que son equivalentes. La clase de equivalencia de $\frac{1}{2}$ se representa mediante la igualdad:

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \ldots\right\}$$

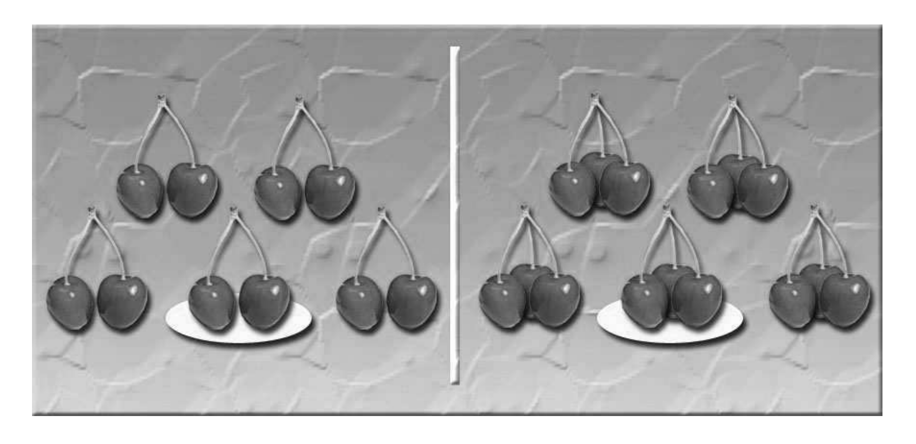
Por costumbre se usa escribir:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \ldots$$

Se dice que $\frac{1}{2}$ es la fracción más simple o simplificada, o *el representante canónico de la clase de equivalencia*. Pero es mejor llamarla *reescrita* o *el nombre más simple*. Recuerde que el número no se reduce, se renombra.

El representante canónico de la clase de equivalencia de un racional determinado es aquel elemento de dicha clase, tal que el numerador y el denominador no tienen factores comunes diferentes de la unidad. Teóricamente se le denomina *un irreducible*, nombre que evitaremos usar en este contexto.

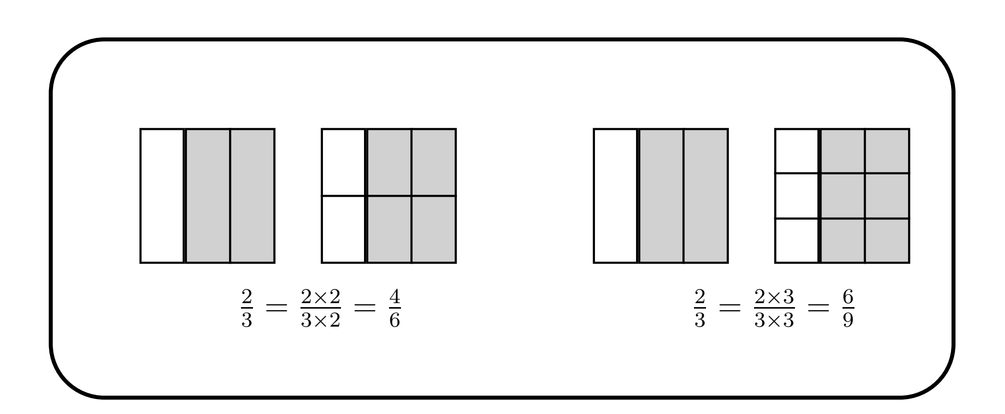
Para obtener una fracción equivalente se multiplica por cualquier elemento de la clase de identidad para el producto $[\frac{1}{1}]$. Este hecho se reduce a multiplicar (o dividir) el numerador y el denominador por el mismo número diferente de cero.



Los óvalos blancos muestran la relación: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15}$.

Para obtener $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ se escogió un conjunto con diez elementos, mientras que para $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$ se necesitó ampliarlo a quince.

Otra forma de visualizar esta situación es a través del doblado de papel. Por ejemplo, divida en forma vertical un rectángulo en tres partes iguales y seleccione dos de ellas coloreándolas, como representación de la fracción $\frac{2}{3}$; posteriormente divida en forma horizontal, primero en dos y luego en tres partes iguales para obtener modelos de las fracciones $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$.



El procedimiento para simplificar fracciones se fundamenta en la división de numerador y denominador por el mismo número diferente de cero. Para este caso solo hay necesidad de descubrir el factor o factores comunes a ambos hasta llegar a la fracción más simple, si es el caso, proceso que puede ser revertido. Cuando sea necesario obtener una fracción ampliada solo tiene que multiplicar numerador y denominador por el mismo factor. Por ejemplo, tomando a $\frac{6}{9}$ se obtiene $\frac{2}{3}$ y viceversa.

Fracción simplificada.

$$\frac{6}{9} = \frac{2\times 3}{3\times 3} = \frac{2}{3}$$

Fracción aumentada.

Hasta ahora se ha insistido en la necesidad de analizar las fracciones equivalentes usando modelos apropiados y haciendo un análisis rápido del algoritmo para simplificarlas. A continuación enunciamos un problema basado en el anterior ejemplo y sus posibles respuestas.

Compruebe que $\frac{6}{9}$ y $\frac{2}{3}$ son equivalentes.

1. Simplificando a $\frac{6}{9}$ se obtiene $\frac{2}{3}$.

2. Si tenemos un conjunto con 9 elementos y tomamos 6, hemos obtenido $\frac{6}{9}$. Por otra parte, si se divide 9 en grupos de 3 y tomamos dos de dichos grupos en total hemos tomado los $\frac{2}{3}$.

3. Multiplicando numerador y denominador de $\frac{2}{3}$ por 3 se obtiene $\frac{6}{9}$.

4. Si tomamos un rectángulo dividido en 3 partes iguales y coloreamos 2, en realidad se han coloreado los $\frac{2}{3}$. Si a continuación dividimos dicho rectángulo en 9 partes iguales la parte coloreada representa los $\frac{6}{9}$.

Las respuestas 2 y 4 se fundamentan en el concepto de fracciones equivalentes, mientras que la 1 y la 3 hacen uso del algoritmo.

La conclusión es que no es recomendable usar un algoritmo antes de tener conocimiento del concepto respectivo. El algoritmo para simplificar fraccionarios no tiene una conexión intuitiva con el concepto de fracciones equivalentes. Con frecuencia el algoritmo solo nos lleva al hecho de multiplicar o dividir sin tener idea del sentido de dichas operaciones. El desarrollo de la teoría debe ser tan bien expuesto que no deje lugar a dudas sobre los conceptos estudiados. Solo de esta manera los algoritmos adquieren un real significado.



OPERACIONES CON LOS RACIONALES

Un real conocimiento de las fracciones es el ingrediente principal para operar con este sistema numérico. No cabe duda que las operaciones con las fracciones deben ser tratadas desde un punto de vista conceptual antes que solamente operativo como se hacía en el pasado. Se recomienda seguir las ideas aprendidas para las operaciones con los enteros. La principal razón de estudiar las operaciones con los racionales es el desarrollo mental que se gana al hacer extensivos los conceptos adquiridos. Si miramos la suma $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$ en su real significado, no hay diferencia conceptual con relación a sumar 2 naranjas más 4 naranjas. En el primer caso el denominador 3 representa la denominación de las cantidades de la misma especie; esto es, tercios, en el segundo las cantidades de la misma especie son naranjas. En las escuelas mexicanas se suman 2 sandías más 4 sandías, mientras que en las americanas suman watermelons y nosotros sumamos patillas, tres nombres diferentes para el mismo vegetal, luego el nombre es lo de menos.

Operar siguiendo los patrones conceptuales, con el espíritu de la solución de problemas, proporciona la oportunidad de aprender verdadera matemática; además, facilita trasladar estos conceptos al álgebra, aunque esta última razón no es suficiente por sí misma.

Enunciar reglas para operar presenta al menos dos inconvenientes. El primero es que no ayudan a pensar en el significado de las operaciones y el segundo es que son fáciles de olvidar. “Para dividir dos fracciones se multiplica por el denominador invertido” es una regla con tal carga de misterio

que a muchos estudiantes les puede llevar a situaciones equivocadas si no hay un análisis conceptual previo de su significado.

Para iniciar las operaciones con las fracciones tenga presente algunos puntos de vista: considere las operaciones con fracciones como una extensión de las mismas operaciones con los enteros; deje claro que representan los mismos conceptos. Por ejemplo, $\frac{2}{3} \times \frac{5}{2}$ se debe interpretar como "$\frac{2}{3}$ de veces $\frac{5}{2}$".

Tome la última parte de la expresión:

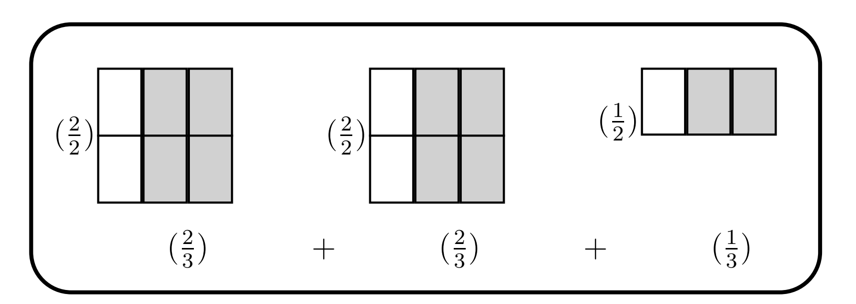
$$\tfrac{5}{2} = \tfrac{2}{2} + \tfrac{2}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + 1 + \tfrac{1}{2}$$

Y aplique la propiedad distributiva así:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3}(1 + 1 + \tfrac{1}{2}) &= \tfrac{2}{3} \times 1 + \tfrac{2}{3} \times 1 + \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

Teniendo presente que la expresión $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ significa: "los dos tercios de la mitad", lo que equivale a decir "un tercio de la unidad".

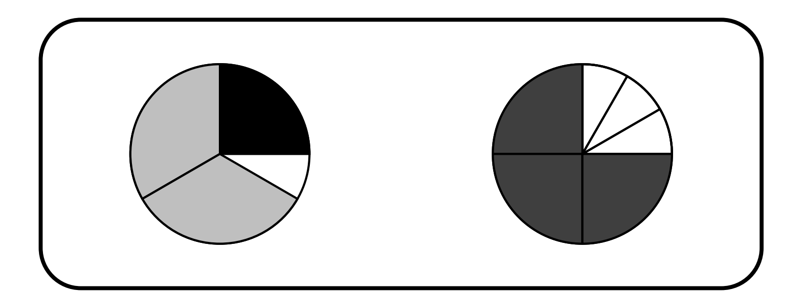
Estimule en los estudiantes el hábito de la construcción de modelos apropiados para presentar las justificaciones requeridas en la solución de problemas. Un modelo muy a propósito es el que se representa a continuación para justificar el producto $\frac{2}{3} \times \frac{5}{2}$. El resultado es el área gris, o sea, $\frac{5}{3}$.



8.1. Adición y sustracción

Permita que los estudiantes desarrollen las sumas usando los modelos más familiares, aunque hayan recibido entrenamiento previo con el método de los denominadores comunes. Si usa los modelos circulares tenga presente que

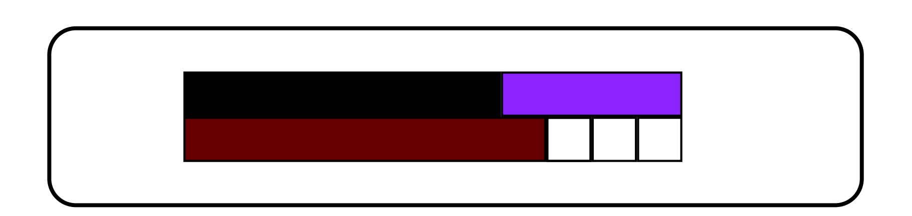
cada uno de ellos representa la unidad. Si usa modelos más flexibles como los conjuntos o las regletas lo primero que debe determinar es el modelo que representa la unidad, para de allí decidir el tamaño de las fracciones. Para sumar $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$, usando un modelo circular, los dos tercios de la región se representaron en gris y un cuarto de la misma en negro. Al efectuar la suma de las áreas, estas no alcanzaron a cubrir el total; quedó una fracción representada en blanco. En el segundo dibujo observamos que un cuarto (en blanco) se ha dividido en tres partes iguales, por tanto cada una de ellas corresponde a una doceava parte del total, de donde se puede concluir por comparación, que $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$.



Este ejercicio es analizado desde el punto de vista geométrico en la siguiente forma:

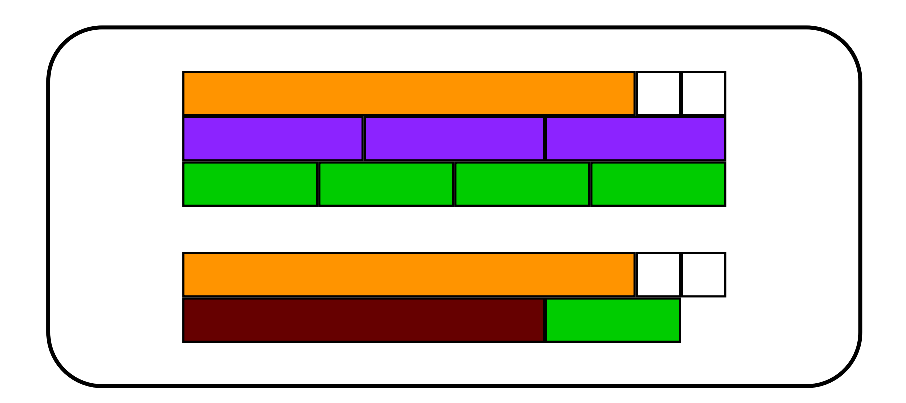
La circunferencia se divide en 360 partes iguales, cada una de las cuales se denomina un grado. Como $120=\frac{360}{3}$ se concluye que 120 grados es la tercera parte, por tanto los $\frac{2}{3}$ corresponden a 240°. Además, 90° son iguales a $\frac{1}{4}$. Al efectuar la suma se obtienen $240^{o}+90^{o}=330^{o}$. Dado que $330=\frac{11\times 360}{12}$, se infiere que 330° son los $\frac{11}{12}$.

Para sumar $\frac{7}{8}+\frac{1}{2}$ se toma una regleta café para representar la unidad, esto es, $\frac{8}{8}$, en consecuencia una púrpura representa $\frac{1}{2}$ y una negra los $\frac{7}{8}$. Para igualar la longitud de estas dos últimas se necesitan una café y tres blancas, lo que indica que la respuesta será $1\frac{3}{8}$. En síntesis: $\frac{7}{8}+\frac{1}{2}=\frac{11}{8}=1\frac{3}{8}$.



Para sumar $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$, usando las regletas, se toman una naranja más dos blancas para representar la unidad, esto es, $\frac{12}{12}$. De acuerdo con la convención anterior, una púrpura representa $\frac{1}{3}$, luego dos púrpuras representan los $\frac{2}{3}$. Pero dos púrpuras son equivalentes a una café y en consecuencia una café representa los $\frac{2}{3}$ de la unidad. Por otro lado, una verde claro representa $\frac{1}{4}$ de la unidad.

Como la suma de una regleta café con una verde claro no alcanzan a completar la unidad, hace falta una blanca, lo que indica que la respuesta es $\frac{11}{12}$. En síntesis $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$.

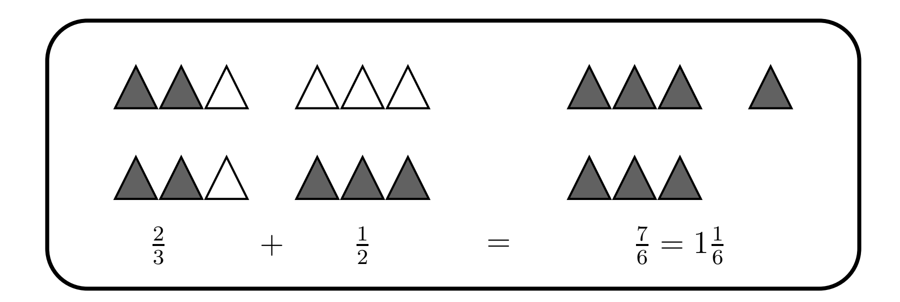


Para encontrar la diferencia $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$ observe que para igualar la longitud de una regleta café se necesitan una verde claro más una amarilla.

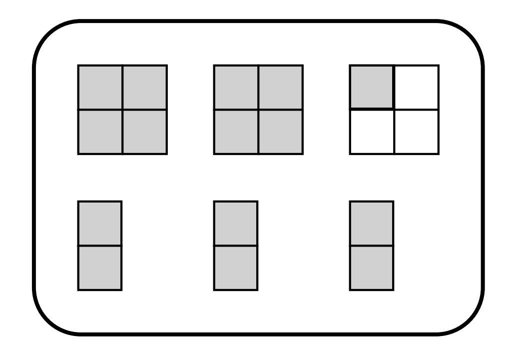
Teniendo en cuenta que una regleta amarilla representa los $\frac{5}{12}$ de la unidad, usando la definición de diferencia, $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.



Los modelos conjuntistas son muy útiles para la representación de sumas. En la suma de $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ el menor número de elementos de la unidad debe ser 6. Los sumandos y el resultado (en gris) se representan de la forma que sigue:



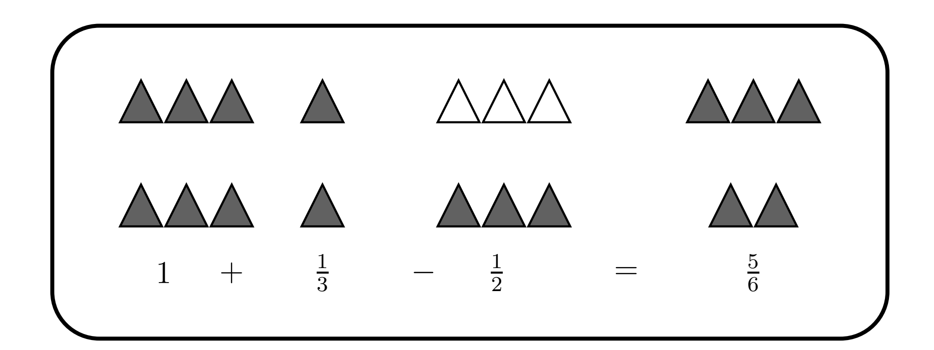
La sustracción es un proceso similar. A veces es posible hallar la suma y la diferencia sin necesidad de subdividir ninguno de los denominadores. Cuando se usan los modelos representados por áreas la idea de un denominador común, a pesar de estar presente, no se percibe a simple vista. Decidir el tamaño de los modelos es matemáticamente equivalente a encontrar un denominador común. La diferencia $\frac{9}{4} - \frac{3}{2}$ se ha desarrollado usando el siguiente modelo:



En los cuadrados superiores, las áreas grises, representan los $\frac{9}{4}$, mientras que los rectángulos inferiores, grises, son los $\frac{3}{2}$. Comparando, note que en la parte superior sobran $\frac{3}{4}$ en gris, lo cual constituye la diferencia. Luego $\frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

Al realizar problemas con modelos no se preocupe por la dificultad. Incluya ejercicios con fracciones de diferente denominador, aquellas cuyo numerador sea 1, así como mixtos. Evite dar métodos de solución. El aprendizaje a través de la solución de problemas y los modelos le permitirán a los estudiantes encontrar las relaciones correspondientes. Discuta los modelos presentados por los diferentes grupos de trabajo.

Para efectuar la resta $1\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$ usando conjuntos, estos se toman con 6 elementos. El minuendo, el sustraendo y la diferencia aparecen en gris.



8.2. El mínimo común múltiplo

El propósito del mínimo común múltiplo es encontrar una medida semejante para convertir fracciones a homogéneas. Con este criterio se presenta en esta sección.

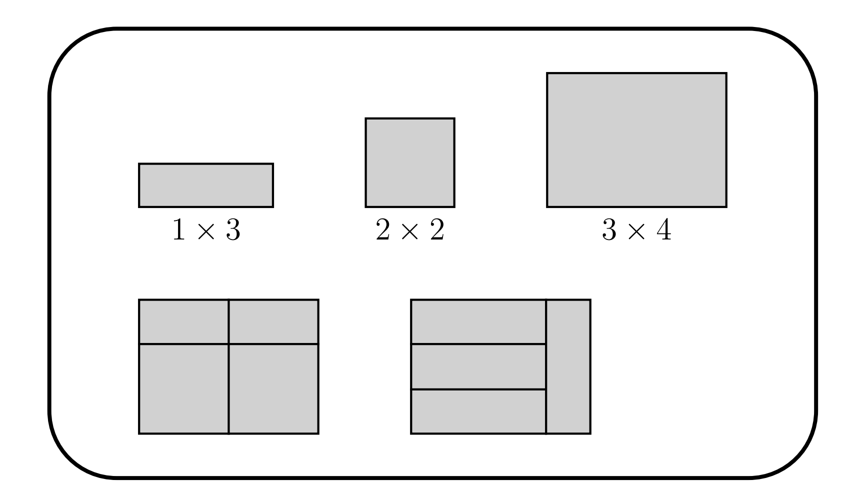
Si examinamos, por ejemplo, los múltiplos de 3 y 4 nos damos cuenta que dichos conjuntos presentan algunos elementos comunes, los que no son otra cosa que la sucesión:

$$\{\mathbf{12},\ \mathbf{24},\ \mathbf{36},\ \mathbf{48},\ \mathbf{60},\ \mathbf{72},\ \mathbf{84},\ \ldots\}$$

Entre ellos el menor es 12, por eso se denomina *el mínimo común múltiplo* entre 3 y 4.

3	6	9	**12**	15	18	21	**24**	27	30	33	**36**	39	42	···
4	8	**12**	16	20	**24**	28	32	**36**	40	44	**48**	52	56	···

Otro modelo es la representación mediante áreas. En el gráfico siguiente se tiene que el área representada por 12 es tres veces mayor que la representada por 4 y cuatro veces mayor que la representada por 3.



La forma tradicional de hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números consiste en escribirlos uno a continuación del otro y descomponerlos en sus factores primos. El producto de los factores primos comunes y no comunes será el número buscado.

3	4	2	$3 = 3$
3	2	2	$4 = 2 \times 2$
3	1	3	$\text{m.c.m} = 2 \times 2 \times 3 = 12$
1	1		

8.3. El algoritmo

El uso de modelos pretende facilitar la labor de sumar y restar al introducir de un modo natural estos conceptos como una extensión de estas mismas operaciones con los enteros. Las sumas y diferencias de fracciones con igual denominador, después de haber sido desarrolladas con modelos, deben ser operaciones triviales que se deben resolver en pocos minutos. Si recordamos que los denominadores iguales se deben tomar como las cantidades de la misma especie, origen de la expresión fracciones homogéneas, las operaciones se reducen a sumar o restar numeradores.

En el caso de las fracciones heterogéneas el proceso se reduce a encontrar opciones diferentes de plantear el mismo problema y esto se da en la medida en que se tenga claridad acerca de la forma de reemplazar una fracción por otra equivalente.

Para abordar el problema de operar con fracciones heterogéneas, inicie con sumas o diferencias donde uno de los denominadores sea múltiplo del otro. Considere un ejemplo como $\frac{7}{6} + \frac{1}{3}$. Usando modelos diferentes permita a los estudiantes encontrar soluciones, las cuales pueden ser: $\frac{9}{6}, \frac{3}{2}, 1\frac{3}{6}, 1\frac{1}{2}$.

Pero el problema principal para resolver es la forma de transformar esta suma en una equivalente con fracciones homogéneas. Para este caso, la mejor opción es encontrar una fracción equivalente al segundo sumando y escribir $\frac{7}{6} + \frac{2}{6}$. En cuanto a las respuestas, se debe concluir que las tres últimas son formas equivalentes del fraccionario $\frac{9}{6}$. Acto seguido, trabaje con fracciones donde sea necesario encontrar un denominador común diferente a cada uno de los dados, por ejemplo $\frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ y enfoque la solución hacia la escritura de esta suma como una equivalente con fracciones homogéneas: $\frac{15}{20} + \frac{8}{20}$.

La idea principal al trabajar con modelos y transformar los sumandos en fracciones equivalentes es que los estudiantes concluyan que hallar un denominador común no es otra cosa que redactar el problema original en términos de fracciones homogéneas.

El uso de los denominadores comunes traslada al trabajo con los múltiplos comunes de dos o más números, noción que solo es posible abordar después de tener claridad vertical acerca de las propiedades del producto, por tanto se deben incluir actividades tendientes a encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más enteros.

8.4. Los números mixtos

Es importante hacer énfasis en que los denominados mixtos no deben considerarse como entidades particulares, por eso se han venido mencionando como sumas de enteros con fracciones, por ejemplo $3 + \frac{1}{2}$ se representa por $3\frac{1}{2}$ y se lee "tres enteros un medio", lo que en realidad significa $\frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. El procedimiento mecánico consiste en multiplicar $3 \times 2 = 6$ y sumar 1 para obtener 7 y escribir este resultado en el numerador, dejando el mismo denominador 2.

Para sumar mixtos podemos proceder así :

$$\begin{aligned} 3\tfrac{1}{4} + 2\tfrac{5}{8} &= (3 + \tfrac{1}{4}) + (2 + \tfrac{5}{8}) \\ &= (3 + 2) + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{8}) \\ &= 5 + \tfrac{7}{8} \\ &= 5\tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

Un método más rápido consiste en transformarlo en la suma:

$$\begin{aligned}\frac{13}{4}+\frac{21}{8} &= \frac{26}{8}+\frac{21}{8}\\ &= \frac{47}{8}\\ &= 5+\frac{7}{8}\\ &= 5\frac{7}{8}\end{aligned}$$

La resta se desarrolla de manera similar y dejamos esta labor a los interesados como un ejercicio saludable.

8.5. El producto



Andrea realiza un producto de fracciones usando las regletas de Cuisenaire.

Con respecto a la multiplicación de fracciones es imprescindible recordar el significado de esta operación con los enteros. Muchos niños tienen la idea de que al multiplicar dos cantidades el resultado debe ser mayor que cada uno de los factores. Por otra parte, al multiplicar fracciones resulta difícil para los menores realizar un estimado del resultado.

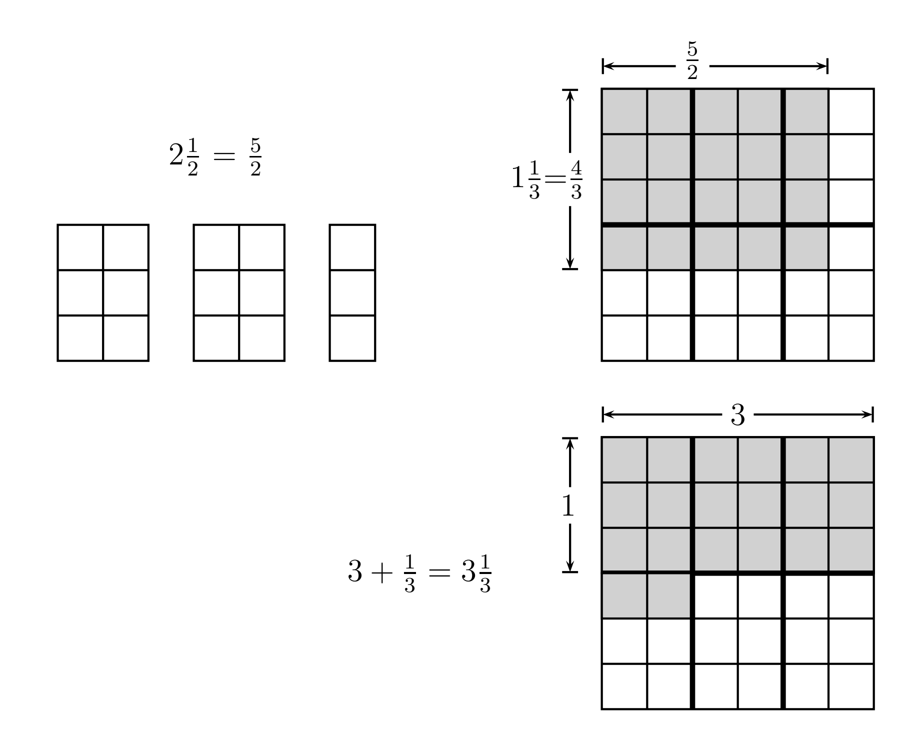
La forma más elemental de introducir el producto es tomando uno de los factores entero, y aplicar la definición dada para este sistema numérico, mediante el uso de modelos. Por ejemplo $2 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$, cuyo significado lo enunciamos como: dos conjuntos de tres quintos es justamente dos conjuntos

con tres objetos, lo que al final significa seis objetos o *seis quintos*. Posteriormente tome productos de la forma: $\frac{3}{4} \times 2$, cuyo significado se interpreta como *los tres cuartos de dos* o *las tres cuartas partes de dos* o *los tres cuartos de un conjunto de dos elementos*.

Proponga ejemplos como $2 \times \frac{3}{5}$ y $\frac{3}{5} \times 2$, cuyos resultados son iguales pero el proceso es un poco diferente. Induzca a pensar que el numerador del producto es el número de partes y el denominador es el nombre de estas partes o el número de partes del entero. Igualmente ayúdelos a ver cómo el producto de dos fracciones no es otra cosa que el producto de los numeradores y los denominadores respectivamente, hecho que debe ser obvio después de ejercitarse con los diferentes modelos.

Para hallar el producto $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ divida el papel en cuatro partes iguales y a continuación en dos, mientras que para desarrollar $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ divida primero en dos y a continuación en cuatro partes. En ambos casos se obtiene $\frac{1}{8}$. El primer producto representa la mitad de un cuarto y el segundo significa la cuarta parte de un medio.

El producto con mixtos, aunque es más difícil para establecer aproximaciones mentales, sirve para desarrollar el algoritmo. Veamos el producto $1\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{2}$. Para el caso se debe dibujar un modelo de $2\frac{1}{2}$ y tomar las $1\frac{1}{3}$ partes.



El problema consiste en encontrar $1\frac{1}{3}$ de un conjunto que posee $2\frac{1}{2}$ elementos. Como la unidad tiene 3 filas y 2 columnas o 3×2 partes, los $1\frac{1}{3}$ deben tener 4 filas y 5 columnas o 4×5 partes. En síntesis:

$$1\tfrac{1}{3} \times 2\tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{3} \times \tfrac{5}{2} = \tfrac{4\times 5}{3\times 2} = \tfrac{20}{6} = 3\tfrac{2}{6} = 3\tfrac{1}{3}$$

Si observa el modelo se dará cuenta que las áreas grises son equivalentes.

El algoritmo expresa que *para multiplicar fracciones se multiplican los numeradores y denominadores entre sí. Si son mixtos, primero se transforman en fracciones impropias.*

Una forma elemental de ver el producto anterior es a través del desarrollo que sigue: “Uno por dos, más uno por un medio, más un tercio por dos, más un tercio por un medio”; este razonamiento permite tener una aproximación mental de la respuesta y decidir que es un número mayor que 3.

Expresando en cifras y aplicando la propiedad distributiva, la oración entre comillas se transforma en las igualdades:

$$\begin{aligned}(1 + \tfrac{1}{3})(2 + \tfrac{1}{2}) &= 1 \times 2 + 1 \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \times 2 + \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} \\ &= 2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{6}\end{aligned}$$

Realizando esta última suma se obtiene $\frac{20}{6}$ y finalmente $3\frac{1}{3}$.

Se debe insistir en que el algoritmo es solo una conclusión del proceso de aprendizaje y por tanto su formulación debe postergarse hasta cuando haya un real entendimiento de los conceptos involucrados.

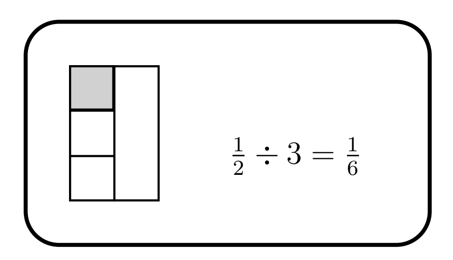
8.6. La división

Antes de mirar la división como la operación inversa del producto, situación que entraña algún misterio para los estudiantes, la trataremos desde un punto de vista más cercano a la realidad de todos los días. Como se hizo con otras operaciones, primero retrocedemos a lo aprendido con los enteros diciendo que esta operación se puede mirar desde dos perspectivas: la partición y la medida.

Desde el punto de vista de la partición, recordemos que se trata de partir los elementos de un conjunto en un número determinado de subconjuntos disyuntos equinumerosos, y determinar el número de elementos de cada uno

de ellos. Se debe explorar la misma idea con las fracciones teniendo presente iniciar con situaciones donde el divisor sea un entero. Si nos enfocamos hacia el aprendizaje a través de la solución de problemas, lo más natural es presentar algunos del siguiente tipo:

¿Si la mitad de un área se divide en 3 partes, de qué consta cada una?



Problemas equivalentes se pueden enunciar así:

1. Si se necesita media yarda de tela para confeccionar tres pañuelos, ¿cuánto se requiere para fabricar uno?

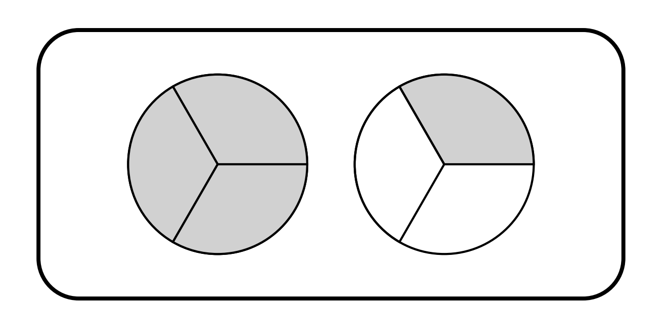
2. Si la mitad de un pastel se reparte entre tres niños, ¿cuánto recibe cada uno?

Otro ejercicio se puede plantear de la siguiente manera:

Para enseñar a conocer las unidades de tiempo, el maestro propone dividir una hora 20 minutos en cuatro partes iguales.

La hora y 20 minutos corresponden a $\frac{4}{3}$ de hora, por lo tanto se trata de efectuar la operación $\frac{4}{3} \div 4$. Pero $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, de donde la respuesta es $\frac{1}{3}$ de hora, o sea 20 minutos.

Un modelo circular es tal vez el más apropiado para ilustrar la solución del problema.



Hay situaciones en que el divisor es una fracción, como en el siguiente ejemplo.

Si $3\frac{1}{3}$ libras de tomates valen lo mismo que $2\frac{1}{2}$ libras de pepinos y la libra de pepinos cuesta 500 pesos, ¿cuánto cuesta una libra de tomates?

Se trata de resolver la división $2\frac{1}{2} \div 3\frac{1}{3}$ o su equivalente $\frac{5}{2} \div \frac{10}{3}$. Transformando las fracciones en homogéneas se escribe $\frac{15}{6} \div \frac{20}{6}$. Como dividendo y divisor son cantidades de la misma especie (sextos), basta con efectuar la división $15 \div 20$, esto es $\frac{15}{20}$. Una libra de tomates cuesta $\frac{15}{20}$ del valor de la libra de pepinos, o sea:

$$\tfrac{15}{20} \times 500 \text{ pesos} = 375 \text{ pesos}$$

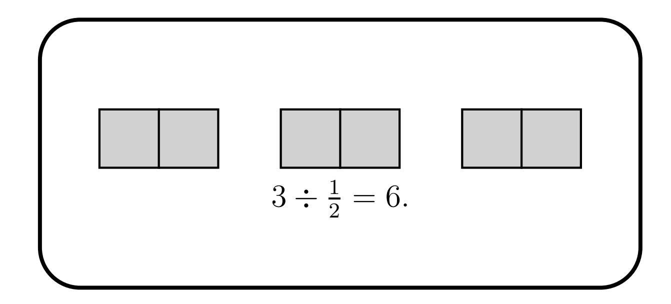
El proceso desarrollado en el anterior problema, es decir encontrar un denominador común, tiene por objeto la posterior aplicación del siguiente algoritmo: *Para dividir fracciones primero conviértalas a homogéneas y después divida los numeradores respectivos.*

Se debe tener presente que los problemas sean relacionados con situaciones asimilables a la vida corriente, con el fin de evitar ficciones que por lo irreal puedan ser motivo de confusiones.

En la división por medida se trata de saber cuántos subconjuntos disyuntos con n elementos hay en un conjunto con m elementos, siempre y cuando m sea un múltiplo de n.

Al efectuar la división $3 \div \frac{1}{2}$ se plantea el problema de saber cuántas mitades resultan si tres regiones se parten en dos áreas iguales.

La respuesta es que hay 6 mitades.



La situación anterior se puede enunciar mediante los siguientes problemas equivalentes:

1. ¿Cuántas medias manzanas hay en 3 manzanas?

2. Si se gasta media yarda de tela para confeccionar un delantal, ¿cuántos delantales se harán con 3 yardas?

3. Hallar el factor perdido si el producto es 3 y uno de los factores es $\frac{1}{2}$, esto es, $\frac{1}{2} \times \square = 3$.

Otro problema consiste en el siguiente enunciado:

¿Cuántos cuartos de una unidad hay en la mitad de ella?

Si la unidad tiene cuatro cuartos, la mitad tiene dos. Al final se debe establecer que:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

Este proceso es conocido como el algoritmo de inversión.

El algoritmo de inversión establece que para dividir fracciones se multiplica por el divisor invertido.

Formas equivalentes del problema anterior se pueden plantear como sigue:

1. ¿Cuántos cuartos de tazas de leche hay en media taza?

2. ¿Cuántos cuartos de metro hay en medio metro?

3. ¿Cuántos cuartos de manzana hay en media manzana?

Transformar a un común denominador para dividir tiene la ventaja de ser entendido con facilidad con la ayuda de modelos y las operaciones con enteros, especialmente para estudiantes menores. Por otra parte, invertir el divisor es un hecho que la mayoría de los estudiantes aplican con muy poca comprensión. Cuando se adquiere el nivel de conocimientos necesario para asimilar este procedimiento se torna más fácil de aplicar y es, además, el método más usado en álgebra cuando el nivel de formalismo lógico está mejor desarrollado.

8.7. Propiedades de las operaciones con los números racionales

Entender las propiedades de las operaciones con los racionales exige haber adquirido un cierto nivel de raciocinio, circunstancia por la cual no es conveniente estudiarlas a partir del solo conocimiento que se tenga sobre estas mismas propiedades con los naturales.

Se puede tener claridad que $3 \times 2 = 2 \times 3$ porque $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, pero ¿qué relación hay entre $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ y $\frac{5}{2} \times \frac{3}{4}$? La primera expresión significa las tres cuartas partes de $\frac{5}{2}$, mientras que la segunda se interpreta como los cinco medios de $\frac{3}{4}$. Decir que estos productos son iguales, haciendo extensiva la propiedad conmutativa del producto de naturales, es asumir una postura temeraria.

Por lo general estas leyes se enuncian y posteriormente se verifican a través de ejemplos. La técnica consiste en efectuar las operaciones y llegar a la misma respuesta, método que considera la obtención de respuestas el fin esencial del proceso de aprendizaje. La respuesta es una buena opción cuando se ha adquirido el nivel del pensamiento adulto.

Partiendo del doblado de papel, los conjuntos, la recta numérica o las regletas, se puede demostrar con relativa facilidad las propiedades de la suma. Para mostrar que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

se puede proceder de varias maneras.

Si divide un pastel en seis partes iguales, la mitad consta de tres porciones y la tercera parte de dos. No importa si primero se toman tres y después dos que primero tomar dos y luego tres. En todo caso se han tomado los $\frac{5}{6}$.

Si tomamos una regleta verde oscuro para designar la unidad, una verde claro representa la mitad, mientras que una roja es un tercio. Da el mismo resultado si se coloca primero la verde claro y a continuación la roja que hacer lo contrario. En todo caso se tienen los $\frac{5}{6}$ de la verde oscuro.

Igual situación se presenta si toma una hoja de papel dividida en seis partes iguales para denominar la unidad.

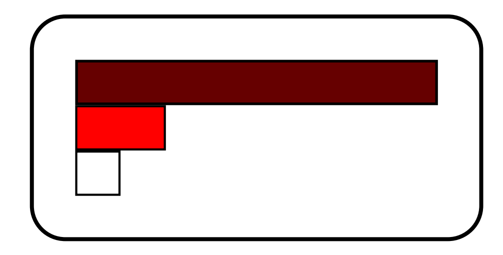
Siguiendo este mismo orden de ideas, la propiedad asociativa se desarrolla con poco esfuerzo. Se debe insistir en la importancia de la correcta elección de los modelos.

Con respecto a la propiedad conmutativa del producto se presenta una forma de mostrar usando las regletas que,

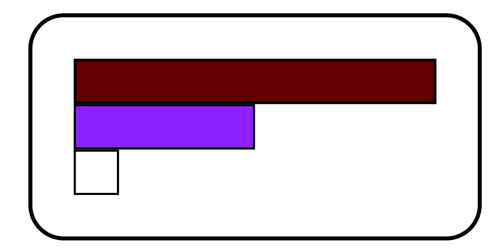
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$$

Si una regleta café representa la unidad, una púrpura es un medio, una roja es un cuarto y una blanca es un octavo.

Representamos primero el producto $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$, esto es, la mitad de un cuarto. En la gráfica viene dado por una regleta blanca o $\frac{1}{8}$.



A continuación se representa el producto $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$, o sea, la cuarta parte de la mitad. En este caso la respuesta también es una regleta blanca, es decir el racional $\frac{1}{8}$.



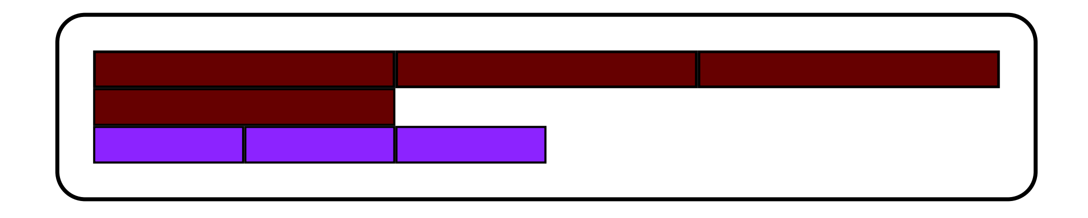
Como en ambos casos la respuesta es $\frac{1}{8}$, la propiedad conmutativa se verifica.

Finalmente, se presenta una forma de mostrar la propiedad asociativa mediante el siguiente ejemplo:

$$(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \times (\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}).$$

Para el efecto la unidad se representa mediante tres regletas cafés, lo que indica que una café es $\frac{1}{3}$, una verde oscuro es $\frac{1}{4}$, una verde claro es $\frac{1}{8}$, una púrpura es $\frac{1}{6}$; y por consiguiente tres púrpuras son $\frac{1}{2}$.

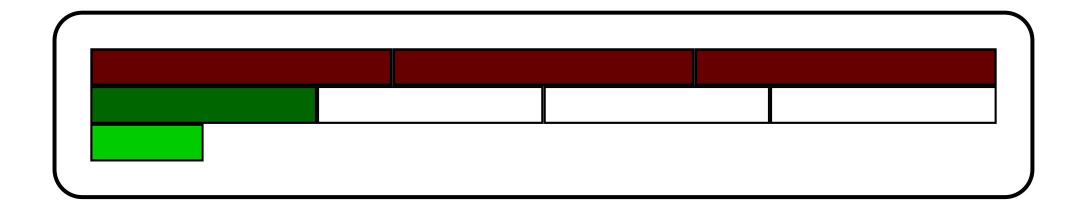
Por otra parte los tres medios de un tercio o $(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3})$ se representa así:



Teniendo en cuenta que tres púrpuras representan $\frac{1}{2}$, de la gráfica superior se observa que $(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$.

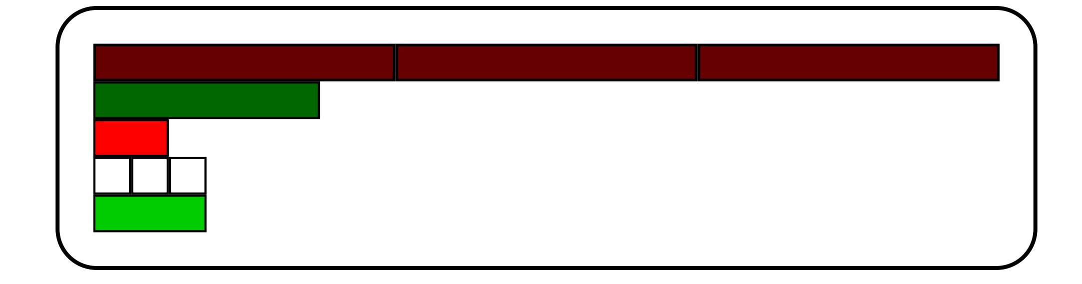
Ahora, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ indica que hay que tomar la mitad de una regleta verde oscuro, o sea una verde claro. En conclusión:

$$(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$



Analizando la expresión $(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4})$: como se vio, $\frac{1}{4}$ es una verde oscuro, $\frac{1}{3}$ de una verde oscuro es una roja, los $\frac{3}{2}$ de una roja son tres blancas o una verde claro; pero una verde claro equivale a $\frac{1}{8}$. De aquí se infiere que:

$$\frac{3}{2}(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$$



En definitiva se ha comprobado que se verifica la propiedad asociativa.

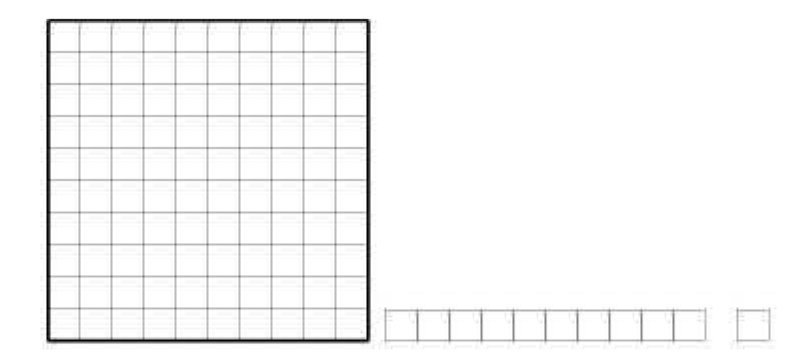
8.8. Fracciones decimales

El uso del sistema decimal para representar medidas fue ignorado por mucho tiempo hasta el punto que los países de habla inglesa adoptaron otras unidades antes que desde Europa se introdujera el sistema métrico decimal.

Los babilonios, mediante el sistema sexagesimal, representaron las fracciones $\frac{1}{60}$ y $\frac{1}{3600}$ las que llamaron *primera pequeña parte* y *segunda pequeña parte*, respectivamente, usando para su escritura una o dos comillas. Las fracciones $\frac{30}{60}$ (30 primeras pequeñas partes) y $\frac{30}{3600}$ (30 segundas pequeñas partes) las denominaron en su orden $30'$ y $30''$.

La extensión de estas ideas al sistema decimal con $0,1$ y $0,01$ como *primera pequeña parte* y *segunda pequeña parte* no fue posible hasta 1585, año en el que se publicó un trabajo formal acerca de las fracciones decimales, conocido en Francia como *La Disme*.

Si un cuadrado de lado igual a la unidad se divide en 100 regiones congruentes, 10 de estas regiones representan $\frac{1}{10}$ de la unidad, mientras que una sola de ellas representa $\frac{1}{100}$. Estas fracciones se conviene en escribirlas $0,1$ y $0,01$ y se denominan *una décima* y *una centésima*, respectivamente.



Siguiendo el mismo orden de ideas, las fracciones $\frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \frac{1}{1000000}$ se les nombra, en su orden, *milésima*, *diezmilésima*, *cienmilésima*, *millonésima* y se escriben como 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001, respectivamente. Los múltiplos de éstas como $\frac{3}{10}, \frac{5}{100}, \frac{6}{1000}, \frac{9}{10000}$ se les nombra *tres décimas*, *cinco centésimas*, *seis milésimas*, *nueve diezmilésimas* y se representan mediante las expresiones $0,3$; $0,05$; $0,006$; $0,0009$.

Por otra parte, los mixtos, tales como, $837\frac{25}{100}$ se escriben en una de las siguientes formas, de acuerdo con el nivel de escolaridad.

$$837 + \frac{25}{100}$$

$$8 \times 100 \ + \ 3 \times 10 \ + \ 7 \times 1 \ + \ 2 \times \frac{1}{10} \ + \ 5 \times \frac{1}{100}$$

$$8 \times 10^2 \ + \ 3 \times 10^1 \ + \ 7 \times 10^0 \ + \ 2 \times \frac{1}{10^1} \ + \ 5 \times \frac{1}{10^2}$$

$$8 \times 10^2 \ + \ 3 \times 10^1 \ + \ 7 \times 10^0 \ + \ 2 \times 10^{-1} \ + \ 5 \times 10^{-2}$$

$$837,25$$

Al dividir dos enteros es factible hacer uso de la segunda de las formas descritas antes. Por ejemplo, al efectuar la división $5 \div 4$, la operación se plantea en la forma que sigue.

$$(5 \times 1 \ + \ \frac{0}{10} \ + \ \frac{0}{100}) \ \div \ 4$$

Al dividir 5 entre 4 se obtiene 1 por cociente y 1 por residuo. Este residuo se escribe como $\frac{10}{10}$. Al dividir $\frac{10}{10}$ entre 4 se obtiene $\frac{2}{10}$ por cociente y $\frac{2}{10}$ por residuo. Este segundo residuo se escribe como $\frac{20}{100}$.

Al dividir $\frac{20}{100}$ entre 4 se obtiene $\frac{5}{100}$ por cociente y 0 por residuo, poniendo fin a la operación. El cociente obtenido está dado por la expresión:

$$1 \ + \ \frac{2}{10} \ + \ \frac{5}{100}$$

Esta suma corresponde al decimal $1,25$.

Una forma alterna consiste en reescribir a 5 en la forma:

$$4 \ + \ \frac{8}{10} \ + \ \frac{20}{100}$$

Tomando a 4 como factor común, esta expresión se convierte en:

$$4(1 \ + \ \frac{2}{10} \ + \ \frac{5}{100})$$

Dividiendo por 4 se obtiene:

$$1 \ + \ \frac{2}{10} \ + \ \frac{5}{100}$$

El proceso anterior debe conducir definitivamente a la forma usual de dividir enteros.

$$\begin{array}{l|l}
5,0'0' & \ 4 \\ \cline{2-2}
1\ 0 & \ 1,25 \\
\ \ 2\ 0 & \\
\ \ \ \ 0 &
\end{array}$$

8.8.1. Operaciones con decimales

Siguiendo el proceso usado para los enteros, y teniendo en cuenta que solo se suman cantidades de la misma especie, la suma y la sustracción de decimales sigue el mismo patrón, es decir ordenar los sumandos de manera que los enteros se correspondan como es habitual, igualmente las décimas con las décimas, y así sucesivamente.

Es conveniente realizar las sumas y las diferencias también como fracciones decimales. Por ejemplo:

$$\begin{array}{rr} & 23,570 \\ + & 46,125 \\ \hline & 59,695 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 2\times 10+3\times 1+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{0}{1000} \\ + & 4\times 10+6\times 1+\frac{1}{10}+\frac{2}{100}+\frac{5}{1000} \\ \hline & 5\times 10+9\times 1+\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{5}{1000} \end{array}$$

La forma más eficaz para enseñar el producto consiste en presentar los factores como fracciones decimales. Por ejemplo, para multiplicar $3,8\times 0{,}4$ se procede así:

$$\begin{aligned} \frac{38}{10}\times\frac{4}{10} &= \frac{38\times 4}{100} \\ &= \frac{152}{100} \\ &= 1,52 \end{aligned}$$

Con diversidad de ejemplos parecidos se debe concluir que *para efectuar la operación se procede como si fueran números enteros y al final el producto contiene tantos decimales como la suma de los decimales de los factores.*

Para dividir *se procede a ampliar la fracción por un determinado múltiplo de* 10*, de tal manera que las cantidades a operar se conviertan en enteros.* Por ejemplo, para dividir $31,2\div 6,24$ se procede como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{31,2}{6,24} &= \frac{31,2\times 100}{6,24\times 100}\\ &= \frac{3120}{624}\\ &= 5\end{aligned}$$

8.9. Razones, proporciones, porcentaje

Los versados en la teoría de Piaget saben que para entender las proporciones se debe haber desarrollado la etapa de las operaciones formales. Trabajar con las razones y las proporciones requiere algo más que el uso de las definiciones y el desarrollo de cierta clase de operaciones. El entendimiento de estos conceptos es necesario para reconocer las múltiples situaciones relacionadas con las propiedades del producto, en contextos de la vida real. La igualdad de razones tiene que ver con las nociones de multiplicación y división antes que con las de suma y resta.

El estudio de las razones y de las proporciones es de tal importancia que amerita dedicarle tanto tiempo como esfuerzo a través de la solución de problemas que planteen las ideas que se quieren transmitir.

Los problemas que siguen sirven de introducción al tema.

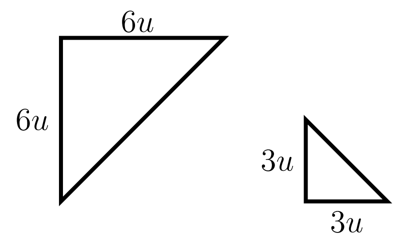
1. Un suplemento alimenticio por cada 30 gramos proporciona 75 kilocalorías. ¿Cuántos gramos del producto se deben ingerir si se desean consumir 50 kilocalorías?

2. En una dulcería venden caramelos Selectos y de otras marcas. El administrador ha notado que los clientes prefieren los Selectos, en detrimento de los otros. Para equilibrar las ventas ha decidido que por cada 15 Selectos se deben comprar 24 de las otras marcas. Si Andrea desea comprar 5 Selectos, ¿cuántos de los otros debe adquirir?

3. Alejandro registró ayer el número de kilómetros recorridos y el tiempo gastado. El día de hoy recorrió menos kilómetros en más tiempo que ayer. ¿Corrió más rápido, más lento, a la misma velocidad o es imposible dar una respuesta?

4. Si 6 metros de tela cuestan 4 euros, ¿cuántos metros se pueden comprar con 6 euros?

5. Si los catetos del triángulo mayor se alargan dos unidades, ¿cuántas unidades deben crecer los catetos del menor?



La respuesta al primer problema se puede abordar de la siguiente forma:

$$30 = 10 + 10 + 10 = 3 \times 10.$$

$$75 = 25 + 25 + 25 = 3 \times 25.$$

Al observar las igualdades nos damos cuenta que por cada 10 gramos se ingieren 25 kilocalorías, lo que indica que para ingerir 50 kilocalorías se debe administrar 20 gramos del producto.

La solución del quinto problema se plantea así: Debido a que la longitud de los catetos del triángulo menor son iguales a la mitad de la longitud del mayor, si los catetos del mayor se alargan en dos unidades, los del menor deben crecer una.

Una razón no es otra cosa que un par ordenado de números usados para establecer comparación entre las cantidades que representen. Estas cantidades pueden ser longitudes u otro tipo de unidades. Las fracciones y las razones son comparaciones, pero las primeras comparan partes con relación a un todo, mientras que las segundas pueden comparar unidades diferentes. En el primer problema se comparan calorías con gramos, en el segundo se comparan marcas de caramelos, mientras que en el quinto se relacionan longitudes. Por otra parte, en el cuarto se establece una rata o razón de cambio conocida como velocidad.

En geometría se ha establecido la razón entre las longitudes de la circunferencia y su diámetro, así como la razón entre el lado y la diagonal de un cuadrado. La pendiente de una recta es la razón entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas de dos de sus puntos.

La probabilidad de que un evento ocurra es una razón. La oportunidad de obtener un 7 al lanzar dos dados es 6 entre 36, lo que es igual a decir 1 entre 6.

Una proporción es la igualdad entre dos razones. A partir de este concepto existe una diferencia real entre una proporción y la igualdad de dos racionales. Como se dijo, dos racionales son iguales cuando se usan para designar el mismo número, esto es, cuando pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Examinemos la diferencia a través de la siguiente situación: En una bolsa hay 6 manzanas amarillas y 10 rojas y otra contiene 12 amarillas y 20 rojas. Es cierto que en cada una hay diferente número de manzanas, pero indudablemente la relación entre amarillas y rojas con respecto al total es la misma en cada bolsa. En la primera hay 2 grupos de 3 amarillas cada uno por 2 grupos de 5 rojas cada uno. En la segunda hay 4 grupos de 3 amarillas cada uno por 4 grupos de 5 rojas cada uno. Pero en cada bolsa hay una relación de 3 amarillas por cada 5 rojas.

Por otra parte, en la primera bolsa hay un total de 16 manzanas mientras que en la segunda hay 32.

Si tomamos a 32 como unidad de medida el contenido de la primera bolsa representa $\frac{1}{2}$ del contenido de la segunda.

Si asociamos las manzanas en grupos de 8. Debido a que 8 es la cuarta parte de 32, en la segunda bolsa habrá un total de $\frac{4}{4}$ y en la primera $\frac{2}{4}$, de donde se concluye que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Si tomamos grupos de 4. Como 4 es la octava parte de 32 en la segunda bolsa habrá $\frac{8}{8}$ y en la primera $\frac{4}{8}$.

Si tomamos grupos de 2, en la segunda habrá $\frac{16}{16}$ y en la primera $\frac{8}{16}$.

Si partimos en grupos de 1, en la segunda bolsa habrá $\frac{32}{32}$ y en la primera se tendrán $\frac{16}{32}$.

Si partimos las manzanas por mitades, en la segunda bolsa se tendrán $\frac{64}{64}$ y en la primera $\frac{32}{64}$, y así sucesivamente.

La anterior situación se expresa diciendo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} = \frac{32}{64} = \cdots$$

Como se había mencionado anteriormente estas igualdades indican que cada uno de estos elementos pertenecen a la clase de equivalencia de $\frac{1}{2}$.

Antes de analizar el algoritmo para la solución de las proporciones se estudiará un par de ejercicios. El primero se enuncia así:

En el supermercado Mart, por la compra de 3 unidades de un determinado producto se concede un descuento de 2400 pesos. ¿Cuánto descuento se recibirá por la compra de 10?

Para la solución de este problema lo pertinente es averiguar el descuento por unidad y esto se logra dividiendo 2400 entre 3, lo que produce un descuento de 800 pesos. A partir de este hecho se afirma que el descuento por las 10 unidades es de $10 \times 800 = 8000$ pesos. Esta clase de solución se le denomina *la rata por unidad*. Es un método semejante al usado en la solución de problemas con fracciones.

El segundo dice:

En el supermercado Market, por la compra de 4 unidades de un determinado producto se concede un descuento de 3750 pesos. ¿Cuánto descuento se recibirá por la compra de 12?

En la solución de este ejercicio el primer método es más laborioso debido a que la división no parece tan simple. Razonando de la siguiente manera la solución se facilita:

Como $12 = 3 \times 4$ se tiene un descuento tres veces mayor. Este método se le llama *factor de cambio*.

Redactar versiones equivalentes de un problema es una ayuda crucial para el entendimiento de la relación planteada. Regresemos al siguiente ejercicio:

En una dulcería venden caramelos Selectos y de otras marcas. El administrador ha notado que los clientes prefieren los Selectos, en detrimento de los otros. Para equilibrar las ventas ha decidido que por cada 15 Selectos se deben comprar 24 de las otras marcas. Si Andrea desea comprar 5 Selectos, ¿cuántos de los otros debe adquirir?

Usando la idea de conjuntos se redacta así:

El conjunto A está conformado por 15 letras del alfabeto y 24 números. Si se desea encontrar un conjunto B con 5 letras que guarde la relación letra–número, ¿cuántos números debe tener B?

Otra versión es la que sigue:

Por cada 15 cuadras caminadas por Olga, Carmen camina 24. Si hoy Olga caminó 5, ¿cuántas caminó Carmen?

8.9.1. Actividades para desarrollar el concepto de proporcionalidad

Mediante algunas actividades sencillas induzca al estudiante a desarrollar la capacidad de razonamiento relacionado con la proporcionalidad. Es pertinente aclarar que estas actividades no deben conducir a plantear algoritmos. La primera actividad es la redacción de problemas equivalentes cuyas soluciones

se realicen mediante el mismo tipo de raciocinio.
Establezca escalas relacionando medidas de diferente índole, como minutos a horas, libras a onzas, días a años, peso a estatura. Para facilitar el trabajo permita el uso de calculadoras.

Las escalas pueden ser de mayor a menor. Por ejemplo:

1. Una yarda son 90 centímetros.

2. Dos yardas son 180 centímetros.

3. ¿Cuántos centímetros son dos yardas y media?

4. ¿Cuántos centímetros son tres yardas?

También se deben establecer escalas descendentes. Por ejemplo,

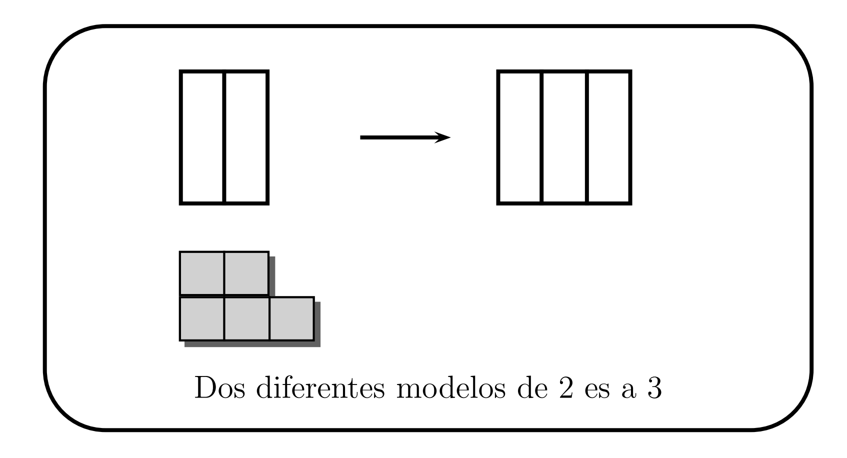
1. Cinco años son 60 meses.

2. Cuatro años son 48 meses.

3. Tres años son 36 meses.

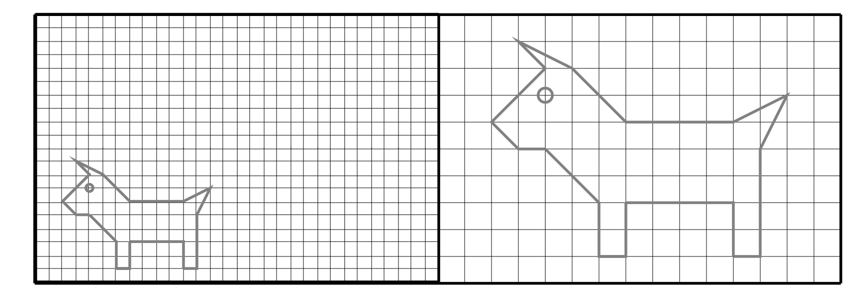
4. ¿Cuántos meses son dos años?

Las regletas de Cuisenaire y las figuras geométricas sirven para establecer modelos apropiados con este propósito.



Dos diferentes modelos de 2 es a 3

Usando papel cuadriculado, o el geoplano, realice un dibujo sencillo y reprodúzcalo mediante ampliaciones o reducciones a escala.



Aprovechando la escala de un mapa cualquiera halle la distancia en kilómetros entre dos ciudades elegidas al azar.

La propiedad fundamental de las proporciones establece que: *En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios*, lo cual, escrito en términos de la lógica matemática se traduce en la proposición.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solamente si } ad = bc$$

Esta expresión nos conduce a "*multiplicar en cruz y despejar la incógnita*". Aunque este es el desarrollo final es necesario preparar al estudiante para que adquiera la idea exacta del procedimiento.

Al momento de plantear una proporción la escogencia de las unidades que se van a correlacionar no es lo más importante. Lo importante es establecer la relación correcta entre ellas. Por ejemplo en la solución del siguiente problema.

Si 3 yardas equivalen a 270 centímetros, ¿a cuántos centímetros equivalen 5 yardas?

Las siguientes proporciones se puede decir que son equivalentes.

$$\frac{270\ cm}{3\ yardas} = \frac{x\ cm}{5\ yardas} \quad \leftrightarrow \quad \frac{5\ yardas}{3\ yardas} = \frac{x\ cm}{270\ cm}$$

Si planteamos la proporción de la izquierda se puede decir que

$$\frac{270}{3} = \frac{x}{5}$$

A partir de esta igualdad razonamos diciendo que $\frac{270}{3}$ es la quinta parte de x, luego x es cinco veces dicha fracción. En síntesis.

$$x = \frac{5 \times 270}{3}$$

Ejercicios similares nos deben llevar a concluir que *El producto de los extremos es igual al producto de los medios*, origen del algoritmo para la solución de las proporciones.

8.9.2. Propiedades de las proporciones

Si hacemos referencia a que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y solamente si } ad = bc$$

Si a ambos miembros de la igualdad de la derecha le sumamos bd, después de factorizar se obtiene:

$$d(a+b) = b(c+d)$$

De la anterior igualdad se obtiene la proporción,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Esta relación lleva a afirmar que:

1) *En toda proporción la suma del antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

Si en lugar de sumar se resta bd, mediante un proceso similar, se llega a la proporción:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

De lo anterior se deduce:

2) *En toda proporción la diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente como la diferencia del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

Partiendo nuevamente de la igualdad $ad = bc$, sumando a ambos miembros ac, conmutando y factorizando se tiene

$$a(c+d) = c(a+b)$$

Y de aquí a la proporción:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

Lo anterior indica que:

3) *En toda proporción la suma del antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente como la suma del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su antecedente.*

Si restamos ac, mediante un proceso similar se obtiene:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

Esta gualdad conduce a decir que:

4) *En toda proporción la diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente como la diferencia del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su antecedente.*

Ahora partamos de las siguientes igualdades:

$$bc = ad$$

$$-ad = -bc$$

Después de sumar miembro a miembro se obtiene:

$$bc - ad = ad - bc$$

Agregando a ambas partes de esta última la expresión $ac - bd$, y reordenando los términos se llega a la igualdad:

$$ac - ad + bc - bd = ac + ad - bc - bd$$

Factorizando se obtiene:

$$(a+b)(c-d) = (a-b)(c+d)$$

Pero esta igualdad representa la proporción:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Y esta establece que:

5) *En toda proporción la suma del antecedente y consecuente de la primera razón es a su diferencia como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su diferencia.*

Invirtiendo los términos de la última proporción se concluye que:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

O sea:

6) *En toda proporción la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la primera razón es a su suma como la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su suma.*

Dadas las razones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ de tal manera que,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Teniendo en cuenta que $ad = bc$ se obtiene la igualdad:

$$ab + ad = ab + bc$$

Factorizando ambos miembros:

$$a(b+d) = b(a+c)$$

Esta expresión conlleva a decir que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$$

De una manera general, si se tiene una serie de razones iguales:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots = \frac{x}{y}$$

De ellas se concluye que:

$$\frac{a+c+e+\cdots+x}{b+d+f+\cdots+y} = \frac{a}{b}$$

7)*En toda serie de razones iguales la suma de los antecedntes es a la suma de los consecuentes como un antecedente cualquiera es a su consecuente.*

Las anteriores propiedades no son aplicables a los racionales. Por ejemplo, de acuerdo con la primera de las propiedades estudiadas y partiendo del hecho que:

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

se obtiene:

$$\frac{6+4}{4} = \frac{3+2}{2} \text{ o su equivalente } \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Desde el punto de vista de las proporciones nada hay más cierto ya que $10 \times 2 = 4 \times 5 = 20$. Por otra parte, si hablamos de fracciones afirmamos que $\frac{6}{4}$ pertenece a la clase de equivalencia de $\frac{3}{2}$ y $\frac{10}{4}$ pertenece a la clase de equivalencia de $\frac{5}{2}$, pero también es obvio que las dos últimas clases mencionadas son diferentes. Lo único que se puede expresar con certeza respecto a los fraccionarios es: Si $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, entonces $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

8.9.3. Porcentaje

Los problemas de porcentaje relacionan una parte y un total medido en alguna unidad y la misma parte y un total que se considera dividida en 100 partes. Estos problemas se reducen a tres clases:

Primera. Se conocen el porcentaje de una unidad y la parte de la otra y se desea hallar el total de esta última.

En el año 1999 el salario mensual de un maestro de la escuela secundaria era de 700 dólares. Por la crisis económica del país, al año siguiente dicho salario fue aumentado solo en un 2 por ciento. ¿Cuánto fue el salario mensual en el año 2000?

En este caso se conoce la parte de la otra unidad, es decir 700. La solución se plantea en los siguientes términos:

$$\frac{x}{700} = \frac{2}{100}$$
$$x = \frac{2 \times 700}{100}$$
$$x = 14$$

El ingreso mensual fue 714 dólares.

Segunda. Se conocen el porcentaje de una unidad y el total de la otra y se desea hallar la parte de esta última.

Una res pierde el 24 por ciento del peso después de sacrificada. Si pesó en pie 500 kilos. ¿cuánto pesó muerta?

La solución consiste en plantear las siguientes igualdades:

$$\frac{500}{x} = \frac{100}{24}$$

$$x = \frac{24 \times 500}{100}$$

$$x = 120$$

Al perder 120 kilos, la res muerta pesó 380 kilos.

Tercera. Se conocen el total y la parte de la segunda unidad y se desea conocer la parte del porcentaje.

Jaime compró un carro a plazos cuyo costo total fue de 3200 euros. Si la cuota inicial fue de 512, ¿qué porcentaje del precio canceló?

La solución se da en los siguientes términos:

$$\frac{3200}{512} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{512 \times 100}{3200}$$

$$x = 16$$

La cuota inicial correspondió al 16 por ciento.

La geometría pitagórica del siglo V antes de Cristo estaba fundamentada en el concepto discreto de número y las proporciones. Durante la última parte del siglo se descubrió que había pares de segmentos que no eran conmensurables. Por ejemplo, el lado y la diagonal de un cuadrado que tiene por lado la unidad, que no podían ser subdivididos en segmentos como múltiplos enteros de segmentos de la misma longitud, por tanto la razón de sus longitudes no es igual a la razón de dos enteros. Igual sucede con la razón entre las longitudes de la circunferencia y su diámetro. En términos modernos equivale a decir que tanto $\sqrt{2}$ como π no son racionales, pero para los griegos el descubrimiento de la inconmensurabilidad significaba que existían magnitudes geométricas que no podían ser medidas con números.

8.9.4. Regla de tres y repartición proporcional

La regla de tres, tanto simple como compuesta, y la repartición proporcional son aplicaciones importantes de las proporciones. Al abordar la solución de un problema de regla de tres lo más importante es determinar si esta es directa o inversa, esto es si las magnitudes involucradas aumentan o disminuyen simultáneamente o, si por el contrario, una disminuye cuando la otra decrece o viceversa. Analicemos el siguiente ejercicio.

Si en 20 minutos una persona recorre 1160 metros, ¿cuántos metros recorrerá en 8 minutos?

La solución se plantea escribiendo los datos relacionados así:

$$\text{20 minutos} \rightarrow \text{1160 metros}$$
$$\text{8 minutos} \rightarrow x \text{ metros}$$

Si no variamos el ritmo de la marcha, al disminuir el tiempo indudablemente disminuirá la distancia recorrida, por lo tanto tiempo y distancia son directamente proporcionales. La solución se obtiene estableciendo una proporción con los datos como aparecen en el planteo inicial, esto es:

$$\frac{20}{8} = \frac{1160}{x}$$

De donde se deduce:

$$x = \frac{8 \times 1160}{20} = 464 \text{ metros}$$

Un ejemplo de magnitudes inversamente proporcionales es el siguiente.

Un grupo de 8 guías exploradores planea salir de excursión con alimentos para 25 días. Si al momento de salir llegan otros 2, ¿para cuántos días alcanzarán las viandas?

$$\text{8 guías} \rightarrow \text{25 días}$$
$$\text{10 guías} \rightarrow x \text{ días}$$

Para la misma cantidad de víveres, si las personas aumentan los alimentos alcanzarán para menos días, lo que indica que personas y alimentos son inversamente proporcionales. En este caso invertimos la razón donde aparece la incógnita, así:

$$\frac{8}{10} = \frac{x}{25}$$

De donde se obtiene la solución definitiva.

$$x = \frac{8 \times 25}{10} = 20 \text{ días}$$

El siguiente es un problema de regla de tres compuesta.

Si 6 guías exploradores pueden alimentarse durante 10 días con 30 kilos de carne, ¿con cuántos kilos podrán alimentarse 4 de ellos durante 8 días?

La solución se inicia como de costumbre con el planteamiento de la relación correspondiente.

$$6 \text{ guías} \rightarrow 10 \text{ días} \rightarrow 30 \text{ kilos}$$

$$4 \text{ guías} \rightarrow \ 8 \text{ días} \rightarrow \ x \text{ kilos}$$

Comparando las magnitudes personas y kilos, notamos que si las personas disminuyen igual sucede con los kilos de carne, entonces se puede plantear la proporción:

$$\frac{6}{4} = \frac{30}{x}$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{4 \times 30}{6} = 20 \text{ kilos}$$

Ahora, considerando que las 4 personas consumen 20 kilos durante los 10 días, si los días disminuyen también disminuirá el consumo de carne, por lo que planteamos la proporción:

$$\frac{10}{8} = \frac{20}{x}$$

Obteniendo la respuesta final:

$$x = \frac{8 \times 20}{10} = 16 \text{ kilos}$$

Para resolver los problemas de repartición se debe usar la propiedad 7 de las series de razones. Veamos un ejemplo.

Dos socios invirtieron respectivamente 3000 y 2000 dólares, obtuvieron una ganancia de 1000. ¿Cuánto debe ganar cada uno?

Designando con x la ganancia del primer socio y con y la del segundo, se escribe la igualdad:

$$x + y = 1000$$

Para efectuar el repartimiento se establece la proporción:

$$\frac{x}{3000} = \frac{y}{2000}$$

Usando la propiedad (7), se establece:

$$\frac{x+y}{3000+2000} = \frac{x}{3000}$$

Pero esta proporción se puede escribir en la forma:

$$\frac{1000}{5000} = \frac{x}{3000}$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{1000 \times 3000}{5000} = 600 \text{ dólares}$$

El segundo socio debe recibir la diferencia, es decir, 400 dólares. Para asegurar la exactitud de la segunda respuesta es prudente repetir el proceso para la segunda variable:

$$\frac{1000}{5000} = \frac{y}{2000}$$

Solución dada por:

$$y = \frac{1000 \times 2000}{5000} = 400 \text{ dólares}$$

La repartición también puede hacerse en forma inversamente proporcional como en el ejemplo anunciado a continuación.

Repartir 4200 en forma inversamente proporcional a 2 y 5.

El problema se plantea como una repartición directamente proporcional a $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{5}$ estableciendo las proporciones correspondientes:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{x+y}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \frac{x+y}{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{5}}$$

Después de realizar operaciones y efectuar los reemplazos correspondientes se obtienen las proporciones:

$$\frac{4200}{\frac{7}{10}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \frac{4200}{\frac{7}{10}} = \frac{y}{\frac{1}{5}}$$

Las proporciones anteriores se transforman en:

$$\frac{4200 \times 10}{7} = \frac{2x}{1} \text{ y } \frac{4200 \times 10}{7} = \frac{5y}{1}$$

De las cuales se obtienen las soluciones $x = 3000$; $y = 1200$.

Entonces, partiendo de la proporción:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{5}}$$

Se demuestra que $2x = 5y$. Usando los métodos del álgebra el problema se reduce a resolver la ecuación $x + y = 4200$ teniendo en cuenta que $x = \frac{5y}{2}$.

Cuando varias personas se asocian para invertir, las ganancias o pérdidas se deben repartir proporcionalmente al capital aportado y al tiempo de la inversión. De esta situación se derivan problemas conocidos como *problemas de sociedad o compañía*, de los cuales se presentan las siguientes situaciones.

1. Que se aporten capitales diferentes durante el mismo tiempo.
2. Que se aporten capitales iguales durante diferente tiempo.
3. Que se aporten diferentes capitales durante diferente tiempo.

En el primer caso la ganancia o pérdida de cada socio depende del capital aportado, reduciendo el problema a un simple caso de repartición proporcional.

Cuatro personas aportan respectivamente 500, 300, 1000 y 800 euros. SI obtienen ganancias por 1500 euros, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

En el segundo caso la ganancia o pérdida depende del tiempo en el que se tengan colocados los aportes. Los problemas de esta clase se resuelven mediante una regla de tres directamente proporcional a los tiempos en que cada capital ha estado invertido.

Tres personas aportan 1500 euros durante 4, 6 y 12 meses, respectivamente. Si obtienen ganancias por 1000 euros, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

En el tercer caso la repartición es compuesta dependiendo del capital y el tiempo.

Dos socios invierten 600 y 800 euros durante 3 y 4 meses, respectivamente. Si al cabo de este tiempo el negocio produjo una pérdida de 250 euros, ¿cuál es la pérdida que debe asumir cada uno?

Las proporciones se plantean así:

$$\frac{x}{600 \times 3} = \frac{y}{800 \times 4}$$

$$\frac{x+y}{600\times 3+800\times 4}=\frac{x}{600\times 3}$$
$$\frac{x+y}{600\times 3+800\times 4}=\frac{y}{800\times 4}$$

Efectuando operaciones y los reemplazos correspondientes, se llega a:

$$\frac{x}{1800}=\frac{y}{3200}$$

$$\frac{250}{5000}=\frac{x}{1800}$$

$$\frac{250}{5000}=\frac{y}{3200}$$

Despejando se llega a:

$$x=\frac{250\times 1800}{5000}=90$$
$$y=\frac{250\times 3200}{5000}=160$$

Para concluir que que el primero perdió 90 euros y el segundo, 160.



TEORÍA DE NÚMEROS

Introducción

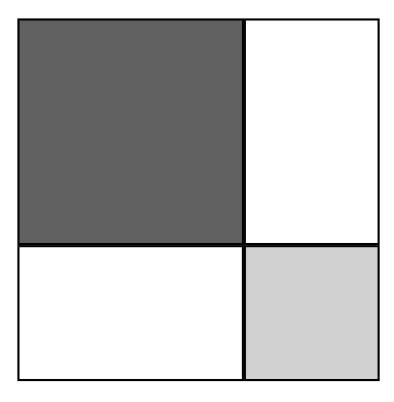
Durante los siglos VII y VIII el imperio musulmán extendió su dominio al Mediterráneo sur, desde Persia y Siria en el este hasta España y Marruecos en occidente. Un siglo de conquista que pronto absorbió la cultura de los territorios conquistados.

Hacia la segunda mitad del siglo VIII se produce el despertar intelectual del Islam. Durante este tiempo fueron llamados a Bagdad sabios procedentes de Siria, Irán y Mesopotamia bajo la protección de Al Mansur, Haroun, Al Raschid y Al Mamun y se convierte a Bagdad en el nuevo centro de investigaciones. Comenzaron a traducir al árabe todas las obras griegas que tuvieron a la mano, entre ellas *Los elementos*, de Euclides, y las obras de Arquímedes, Apolonio y Tolomeo. Al Mamun fundó La Casa de la Sabiduría comparable al antiguo museo de Alejandría.

Durante siete siglos conquistaron los territorios aledaños al Mediterráneo, establecieron su cultura, absorbieron la ciencia griega junto con la hindú y la babilonia. El matemático y astrónomo Al–Khowarizmi escribió en Bagdad, a principios del siglo IX, su segundo libro titulado *Al–Jabr Wa I muqabalah*, dando origen, según se cree, al término álgebra. Al–Jabr probablemente se refería a la transposición de términos y muqabalah a la cancelación de términos iguales a ambos miembros de una ecuación.

Estudió la ecuación $x^2 + 10x = 39$, la que estableció como: un cuadrado más diez de sus raíces (lados) son iguales a treinta y nueve. Planteó una solución geométrica iniciando con un cuadrado de área x^2 (cuadrado gris claro).

Para obtener $10x$ agrega dos rectángulos de área $5x$ cada uno (rectángulos blancos) y completa con el cuadrado de área 25 (cuadrado gris oscuro) que corresponde a elevar al cuadrado la mitad del número de raíces. Como $x^2 + 10x = 39$, se entiende que el área total es igual a $39 + 25 = 64$, teniendo entonces que la longitud total del lado debe ser igual a 8. Como el lado del cuadrado gris oscuro es igual a 5, la solución definitiva es $x = 8 - 5 = 3$.



La solución basicamente se traduce en: Tome la mitad del número de raíces, esto es 5, y multiplíquela por sí misma para obtener 25. Súmele 39 para obtener 64. Tome la raíz cuadrada, es decir 8 y réstele la mitad de las raíces o sea 5 para obtener 3. En términos matemáticos significa que la raíz positiva de $x^2 + 2bx = c$ es $-b + \sqrt{b^2 + c}$.

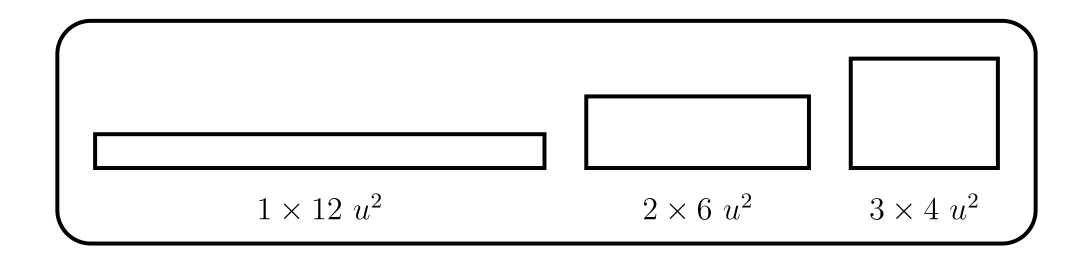
En el hecho de tomar la mitad del número de las raíces y elevarla al cuadrado se nota la idea de completar el cuadrado de la suma de dos cantidades usando el Binomio de Newton. Esta solución se resume así:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x &= 39 \\ x^2 + 10x + 25 &= 25 + 39 \\ (x+5)^2 &= 64 \\ x + 5 &= 8 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

El anterior desarrollo ilustra cómo desde la antigüedad los números fueron considerados como áreas para dar solución a infinidad de problemas. Mirados como áreas, los naturales presentan algunas propiedades y relaciones interesantes que ameritan su comprensión. Los conceptos de primalidad, paridad, imparidad y las nociones relacionadas como factor, múltiplo y divisibilidad son el sustento de muy buena parte de la teoría de la aritmética elemental. La

descomposición en factores primos es parte preponderante en la conversión de fracciones heterogéneas en homogéneas. Los primos sirven para construir nuevos naturales denominados compuestos, si miramos estos últimos desde el punto de vista de las áreas.

Sin tener en cuenta la propiedad conmutativa del producto, con el número 12 se pueden construir tres rectángulos que midan 12 unidades cuadradas así:



Con el 36 se construyen cinco, el último de los cuales es un cuadrado. Ellos son: 1×36, 2×18, 3×12, 4×9 y 6×6. Por otra parte con cada uno de los números $2, 3, 5$ y 7 solo se puede construir uno: 1×2, 1×3, 1×5 y 1×7.

Utilizando papel cuadriculado, el geoplano u otro tipo de modelo, induzca a los estudiantes a confeccionar rectángulos o cuadrados con cualquier número entre 2 y 100, con el propósito de observar que existen ciertos números, como los últimos citados, con cada uno de los cuales solo se puede construir un rectángulo, y este nunca puede ser un cuadrado.

Teniendo presente que cada uno de los lados representa un factor se debe concluir que existen números diferentes de 1 que solo admiten dos factores los cuales son la unidad y él mismo. A esta clase de números se les da el nombre de *primos*. Hay una segunda clase, como el 12, a los cuales se les llama *compuestos*. Finalmente se debe tener presente que 1 no es ni primo ni compuesto y recibirá el nombre de *unidad*.

Una vez el concepto de número primo sea asimilado se deben encontrar algunas relaciones entre ellos. Por ejemplo, dado un número, decidir si es primo o no y dar razones. Notar que 3 es primo y $2 \times 3 - 1 = 5$ también lo es.

La Conjetura de Goldbach establece que cualquier par diferente de 2 puede escribirse como la suma de dos primos, por ejemplo $28 = 23 + 5$. Este enunciado no ha sido probado. (Goldbach, 1690–1764).

Un número positivo es *perfecto* si es igual a la suma de todos sus divisores excepto él mismo, por ejemplo, $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Si

la suma es menor el número se llama *deficiente* y si es mayor se denomina *abundante*. El 34 es deficiente y el 36 es abundante.

Proponga múltiples ejercicios de descomposición en factores primos y deje que los estudiantes los resuelvan escribiendo los factores en cualquier orden, para llegar a la conclusión mediante la discusión de los diferentes procedimientos, que dicho orden no varía el resultado. *El teorema fundamental de la aritmética establece que la descomposición de un número en factores primos es única salvo el orden en que se escriban.* Se acostumbra ubicarlos de menor a mayor escribiendo cada uno cuantas veces aparezca. Por ejemplo: $600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$.

Los criterios de divisibilidad establecen reglas para encontrar los factores primos de un número. Algunos se enuncian así:

Divisibilidad por 2: un entero es divisible por 2 si termina en un dígito par.

Divisibilidad por 3: un entero es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es 3 o múltiplo de 3.

Divisibilidad por 5: un entero es divisible por 5 si termina en 0 o en 5.

Divisibilidad por 7: un entero es divisible por 7 si al separar el dígito de las unidades, multiplicarlo por 2 y restarlo de lo que queda a la izquierda, y así sucesivamente, da 0 o múltiplo de 7.

Los criterios anteriores son de poca importancia práctica y su redacción a menudo es difícil de descifrar. Como son ignorados por la mayoría de los estudiantes, quienes prefieren efectuar las divisiones, es mejor presentarlos en la solución de problemas como una forma de relacionarlos con la escritura polinómica en base 10 de los enteros.

9.1. Potenciación

Igual que el producto, la potenciación se debe mirar como una suma repetida. Por ejemplo, la expresión 2×2 cuyo significado es $2+2 = 4$, se puede expresar mediante las igualdades:

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

Si multiplicamos nuevamente por 2 se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 \times 2^2 &= 2(2 \times 2) \\ &= 2(2+2) \\ &= (2+2)+(2+2) \\ &= 2+2+2+2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

De donde se establecen las igualdades:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2 \times 2^2 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

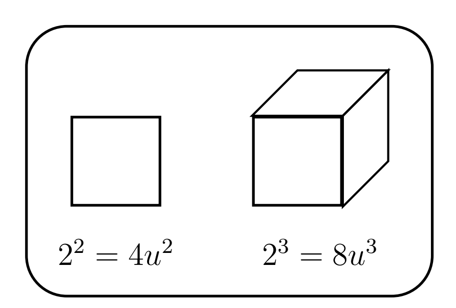
$$\begin{aligned} 2^4 &= 2 \times 2^3 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^5 &= 2 \times 2^4 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ &= 32 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente, se escribe:

$$\begin{aligned} 2^n &= 2 \times 2^{n-1} \\ &= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ factores}} \end{aligned}$$

Para el presente caso, n es un entero positivo. La cifra pequeña escrita en la parte superior se le llama *exponente* e indica el número de veces que se ha multiplicado 2 por sí mismo. A 2 se le nombra la *base*. La figura representa los modelos para 2^2 y 2^3. Por la forma de los dibujos se les nombra *el cuadrado y el cubo de* 2, respectivamente.



Si el anterior producto se aplica a cualquier entero o fracción positiva se obtienen expresiones como las que siguen:

$$5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$
$$(\tfrac{3}{2})^4 = \tfrac{3}{2} \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{3}{2} \times \tfrac{3}{2} = \tfrac{81}{16}$$

Estos productos se denominan *potencias* y se nombran *segunda potencia o cuadrado*, *tercera potencia o cubo* y a partir de aquí se les asigna el ordinal correspondiente: *cuarta, quinta, sexta potencia*. La expresión $5^4 = 625$ se lee: "La cuarta potencia de 5 es 625".

9.2. Operaciones con las potencias

Al igual que los enteros y las fracciones, las potencias se suman, restan, multiplican, dividen y se les eleva a nuevas potencias. Por ejemplo, las sumas $5 \times 4^3 + 7 \times 4^3$ y $\frac{3}{4} \times 5^2 + \frac{2}{3} \times 5^2$ se realizan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 5 \times 4^3 + 7 \times 4^3 &= (5+7) \times 4^3 \\ &= 12 \times 4^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4} \times 5^2 + \tfrac{2}{3} \times 5^2 &= (\tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{3}) \times 5^2 \\ &= \tfrac{17}{12} \times 5^2 \\ &= 1\tfrac{5}{12} \times 5^2 \end{aligned}$$

Las diferencias se realizan de manera similar.

Por otra parte, los productos $3^2 \times 3^4$ y $(\frac{2}{5})^3 \times (\frac{2}{5})^5$ se describen así:

$$\begin{aligned}3^2 \times 3^4 &= (3 \times 3)(3 \times 3 \times 3 \times 3)\\ &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3\\ &= 3^6\\ &= 3^{2+4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{2}{5}\right)^3 \times \left(\tfrac{2}{5}\right)^5 &= \left(\tfrac{2}{5}\right)^{3+5}\\ &= \left(\tfrac{2}{5}\right)^8\end{aligned}$$

Se concluye que *para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes.*

Con respecto a la división se tiene por ejemplo:

$$\begin{aligned}7^5 \div 7^3 &= \tfrac{7^5}{7^3}\\ &= \tfrac{7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7}\\ &= 7^2\\ &= 7^{5-3}\end{aligned}$$

En síntesis, *para dividir potencias de igual base se restan los exponentes.*

Finalmente se calcula la siguiente operación:

$$\begin{aligned}&(6^3)^2 = 6^3 \times 6^3\\ &= 6^6\end{aligned}$$

De donde se deduce que *para encontrar la potencia de una potencia se multiplican los exponentes.*

9.3. El concepto de raíz

El teorema del binomio establece que *para encontrar el cuadrado de la suma de dos cantidades, se suman el cuadrado de la primera más el doble del producto de la primera por la segunda más el cuadrado de la segunda.* Usando la notación del álgebra:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En general, se tiene la proposición: Si $y = x^2$, entonces $\sqrt[2]{y} = x$. Esta expresión permite encontrar la raíz cuadrada de cualquier número positivo.

Por ejemplo, para desarrollar la expresión $(5+3)^2$ se establecen las igualdades:

$$(5+3)^2 = 5^2 + 2(5 \times 3) + 3^2 = 25 + 30 + 9 = 64$$

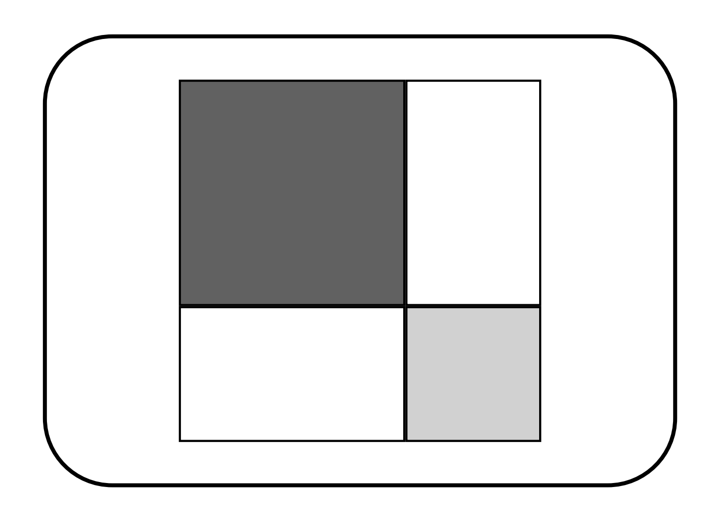
Es posible que usted esté pensando que hubiera sido más fácil sumar primero y elevar al cuadrado el resultado. En este caso:

$$(5+3)^2 = 8^2 = 64$$

Indudablemente que tiene razón, pero la idea que traemos en mente justificará el camino más largo.

Un modelo para el primer procedimiento se representa con la figura que sigue, donde el área gris oscuro representa $5^2 = 25$, la blanca superior es $5 \times 3 = 15$, mientras que la inferior es $3 \times 5 = 15$ y la gris claro es $3 \times 3 = 9$. Sumando se llega a:

$$5^2 + 2(5 \times 3) + 3^2 = (5+3)^2$$



Otro ejemplo es el desarrollo de $(\frac{3}{2} + \frac{1}{4})^2$, este se plantea así:

$$\begin{aligned}(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4})^2 &= \tfrac{9}{4} + 2(\tfrac{3}{2})(\tfrac{1}{4})) + \tfrac{1}{16} \\ &= \tfrac{49}{16}\end{aligned}$$

Sin usar la tecla de la raíz, mediante la calculadora se resuelven las ecuaciones: $a^2 = 25$, $a^2 = 54$, $a^3 = 64$, $a^3 = 245$.

La calculadora permite encontrar soluciones con cierta rapidez, al menos para 25 y 64. Para 54 la solución está entre 7 y 8. Como $(7{,}3)^2 = 53{,}29$, esta debe ser un número un poco mayor que 7,3. Probando con 7,34 se tiene que $(7{,}34)^2 = 53{,}80$; entonces la raíz puede aproximarse a $7,34$. Al final, la solución se puede dar con el grado de exactitud exigido mediante ensayo y error. Para 245 la situación no es diferente. Mediante este método simple se encuentran soluciones a ecuaciones del tipo $x^7 = 68$.

A partir de este entrenamiento, los estudiantes aprenderán el concepto de raíz n-ésima de un número a, como el número que elevado a la potencia n es igual a a. Las raíces cuadradas y cúbicas solo son dos casos particulares. En especial la raíz cuadrada ocupará nuestra atención.

Abordamos el problema de hallar la raíz cuadrada de un natural, por ejemplo 576. Se trata de hallar una suma que elevada al cuadrado sea igual a 576.

$$\begin{aligned} 576 &= 400 + 176 \\ &= 400 + 40 \times 4 + 16 \\ &= 20^2 + 2(20 \times 4) + 4^2 \\ &= (20 + 4)^2 = 24^2 \end{aligned}$$

De estas igualdades se deduce que $576 = 24^2$ o $\sqrt[2]{576} = 24$. Veamos lo que hubo detrás del proceso. Para encontrar el dígito de las decenas debemos pensar en los cuadrados de $10, 20, 30$, o sea $100, 400, 900$, respectivamente. Una simple mirada indica que el número apropiado es 400, por tanto el primer sumando es 20. Para hallar las unidades realizamos el producto $2\times 20 = 40$. Si dividimos 176 entre 40 se obtiene 4 por cociente y un residuo de 16. Tomando el producto $40 \times 4 = 2(20 \times 4)$ se obtiene la igualdad:

$$176 = 2(20 \times 4) + 16$$

Lo que al final produce, de acuerdo con el binomio de Newton la expresión:

$$\begin{aligned} 576 &= 20^2 + 2(20 \times 4) + 4^2 \\ &= (20 + 4)^2 \\ &= 24^2 \end{aligned}$$

Para hallar la raíz cuadrada de 1849 vemos que el múltiplo de 10, cuyo cuadrado se acerca más a 1849, es 40 que para el caso es 1600, luego procediendo como se hizo anteriormente se obtiene:

$$\begin{aligned} 1849 &= 1600 + 249 \\ &= 1600 + 80 \times 3 + 9 \\ &= 40^2 + 2(40 \times 3) + 3^2 = (40+3)^2 \\ &= 43^2 \end{aligned}$$

Al dividir 249 entre 80 (el doble de 40) se produce un cociente de 3 y un residuo de 9 y de allí el reemplazo de 249 por la suma $2(40 \times 3) + 3^2$. Finalmente se deduce que $\sqrt[2]{1849} = 43$.

Pero, ¿qué sucede si queremos obtener la raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto? Sencillamente el procedimiento es similar. Veamos,

$$\begin{aligned} 632 &= 400 + 232 \\ &= 400 + 200 + 25 + 7 \\ &= [20^2 + 2(20 \times 5) + 5^2] + 7 \\ &= [20 + 5]^2 + 7 \end{aligned}$$

De donde finalmente se obtiene $632 = 25^2 + 7$. En conclusión, $\sqrt[2]{632} = 25$ y sobra un residuo de 7.

Al dividir 232 entre 40 (el doble de 20) se obtiene 5 por cociente y un residuo de 32. En consecuencia:

$$\begin{aligned} 232 &= 40 \times 5 + 32 \\ &= 2(20 \times 5) + 25 + 7 \\ &= 2(20 \times 5) + 5^2 + 7 \end{aligned}$$

Ahora definitivamente tiene significado el uso del algoritmo tradicional para obtener las raíces cuadradas. Este establece que para hallar la raíz cuadrada: Se divide el número dado en períodos de dos cifras de izquierda a derecha; el período del extremo izquierdo puede constar de una sola cifra. A continuación se extrae la raíz al primer período de la izquierda y esta será el primer dígito de la raíz. Este dígito se eleva al cuadrado y dicho cuadrado se resta del primer período. A la derecha de la diferencia se escribe el segundo período,

se separa con una coma la cifra de la derecha y lo que resta a la izquierda se divide por el doble de la raíz hallada. El cociente es el segundo dígito de la raíz o una cifra mayor.

Para probar si esta cifra es correcta se la escribe a la derecha del doble de la raíz hallada hasta el momento y el número así conformado se multiplica por la cifra que se comprueba. Si este producto se puede restar del número del cual separamos la cifra de la derecha, el número es correcto y se escribe en la raíz; si no se puede restar, se le disminuye una unidad o más hasta cuando la resta sea posible. Efectuada la resta, a la derecha del resultado se escribe el período siguiente y se repite el proceso hasta haber bajado todos los períodos.

Usando el algoritmo hallemos la raíz cuadrada de 1849.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt[2]{\;18\cdot 49\;} & 43 \\ \cline{2-2}
-\,16 & 83 \\ \cline{1-1}
24\cdot 9 & \times 3 \\ \cline{2-2}
-2\;4\;9 & 249 \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Al separar en dos períodos en realidad se ha escrito a 1849 mediante la suma $1800 + 49$. La raíz aproximada de 1800 es 40, por tanto el cuadrado de 40 es 1600. Luego establecemos la igualdad:

$$1849 - 1600 = 249$$

Esta diferencia implica bajar el segundo período. Al separar las unidades de 249, lo que se ha hecho es escribir este resto mediante la suma $240 + 9$.

La raíz duplicada es 80 y al dividir 240 entre 80 se obtiene 3, resultado que corresponde a la segunda cifra de la raíz.

La expresión $83 \times 3 = 249$ se puede escribir mediante las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
[80 + 3]3 &= [2(40) + 3]3 \\
&= 2(40)(3) + 3^2 \\
&= 240 + 9 \\
&= 249
\end{aligned}$$

Esto es, el doble producto de cuarenta por tres más el cuadrado de tres.

En síntesis, se ha llegado a la conclusión que:

$$\begin{aligned} 1849 &= 40^2 + 2(40)(3) + 3^2 \\ &= (40+3)^2 \\ &= 43^2 \end{aligned}$$

Esto es, el cuadrado de cuarenta más el doble producto de cuarenta por tres más el cuadrado de tres.

Compare este resultado con el descrito anteriormente para este mismo número.

De acuerdo con el teorema del binomio:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

Esta igualdad sirve para hallar raíces cuadradas de números de cinco a seis dígitos. Por ejemplo:

Hallar la raíz cuadrada de 55225.

Desarrollando el trinomio para este caso particular tenemos:

$$\begin{aligned} 55225 &= 40000 + 12000 + 900 + 2000 + 300 + 25 \\ &= 200^2 + 2(200)(30) + 30^2 + 2(200)(5) + 2(30)(5) + 5^2 \\ &= (200+30+5)^2 \\ &= 235^2 \end{aligned}$$

De las igualdades anteriores se concluye que $\sqrt[2]{55225} = 235$.

De haber usado el algoritmo hubiera habido la necesidad de repetir el proceso dos veces. Por otra parte, si el número propuesto no es un cuadrado perfecto el desarrollo permite hallar un residuo diferente de cero.

Sir Isaac Newton (1642–1727) concibió un método eficaz para aproximar las raíces de ecuaciones basado en el cálculo infinitesimal. Para las raíces cuadradas consiste en un proceso iterativo de “dividir y obtener promedio”, circunstancia que lo hace muy adecuado para desarrollarlo con cualquier tipo de calculadora.

Geométricamente equivale a construir un cuadrado de área aproximada al número cuya raíz queremos calcular y “hacerlo más cuadrado”; esto es ir disminuyendo la diferencia entre la longitud de los lados hasta lograr que

estos sean congruentes, en cuyo caso cada uno de ellos representa la raíz del número dado.

El método consiste en tomar una primera aproximación de la raíz y aplicar reiterativamente la fórmula:

$$V_{i+1} = \frac{\frac{N}{V_i} + V_i}{2}$$

Al efectuar la división de N entre V_i aproximamos hasta que haya el doble de dígitos que en la aproximación anterior.

Para calcular $\sqrt{500}$ se procede de la siguiente forma: Puesto que:

$$22^2 = 484 < 500 < 529 = 23^2$$

se elige a 22 como una primera aproximación, esto es $V_1 = 22$.

Siguiendo el proceso se obtiene:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\frac{500}{22} + 22}{2} \\ &= \frac{22{,}72 + 22}{2} \\ &= 22{,}3600 \end{aligned}$$

A partir de esta segunda aproximación se calcula la tercera:

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{\frac{500}{22{,}3600} + 22{,}3600}{2} \\ &= \frac{22{,}3613 + 22{,}3600}{2} \\ &= 22{,}360679 \end{aligned}$$

Una cuarta aproximación viene dada por:

$$\begin{aligned} V_4 &= \frac{\frac{500}{22{,}360679} + 22{,}360679}{2} \\ &= \frac{22{,}360680 + 22{,}360679}{2} \\ &= 22{,}36067977 \end{aligned}$$

Para verificar que V_4 es una buena aproximación basta con observar la igualdad:

$$V_4{}^2 = (22{,}36067977)^2 = 499{,}99999977$$

Un aspecto importante que cabe notar es que una aproximación pobre proporciona el mismo resultado después de algunas reiteraciones adicionales, lo cual es previsible ya que se trata de ir disminuyendo cualquier diferencia entre los lados del cuadrado elegido en primera instancia.

Si en el caso anterior se hubiera tomado 20 como primera aproximación, al continuar el proceso se obtendría:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\frac{500}{20} + 20}{2} \\ &= \frac{25 + 20}{2} \\ &= 22{,}5 \end{aligned}$$

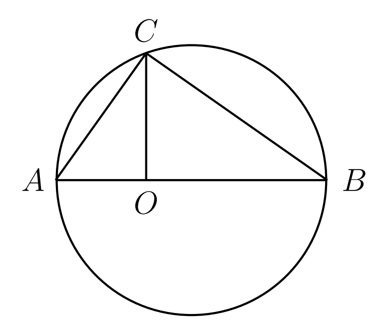
Y de este resultado se tendría la tercera aproximación, así:

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{\frac{500}{22{,}5} + 22{,}5}{2} \\ &= \frac{22{,}22 + 22{,}5}{2} \\ &= 22{,}36 \end{aligned}$$

Esta es una buena respuesta.

En las proposiciones II.14 y VI.13 de *Los elementos*, Euclides (300 a. C.) expuso la construcción de la media geométrica $\sqrt{ab}$ de dos cantidades a, b. Este hecho hace posible construir $\sqrt{a}$ tomando $b = 1$. El modelo geométrico permite construir la raíz cuadrada con regla y compás así: Para hallar la raíz cuadrada del número a se traza un segmento $\overline{AB}$ de longitud $a+1$ y se dibuja una circunferencia de diámetro $a + 1$.

En $\overline{AB}$ se toma el punto O de tal forma que $\overline{AO} = 1$, lo que significa que $OB = a$. Por el punto O se traza la perpendicular que intersecta la circunferencia en C. La conclusión es que $OC = \sqrt{a}$.



El ángulo C mide 90° por ser un ángulo inscrito en una semicircunferencia. Los ángulos ACO y BCO son complementarios.

Como la suma de las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90°, se obtiene la ecuación:

$$90 = B + BCO$$

Pero $BCO = 90 - ACO$.

De donde se obtiene la ecuación:

$$90 = B + (90 - ACO)$$

Y de esta última se concluye que $B = ACO$.

De la ecuación:

$$90 = A + ACO$$

se tiene $90 = A + (90 - BCO)$ y de aquí se concluye que $A = BCO$.

De lo anterior se infiere que los triángulos CBO y ACO son semejantes, por tanto sus lados correspondientes son proporcionales; esto es:

$$\frac{OC}{1} = \frac{OB}{OC}$$

Finalmente, $OC^2 = OB$ o de forma equivalente $OC = \sqrt{OB} = \sqrt{a}$

9.4. Raíces de orden superior

Si seguimos los delineamientos trazados es posible hallar raíces enteras de orden superior usando el desarrollo de una potencia cualquiera del binomio $(a + b)$. Para las raíces cúbicas se hace uso de la igualdad:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Esta igualdad es el origen del algoritmo para extraer raíces cúbicas.

Para hallar la raíz cúbica de 12167 note que el múltiplo de 10 cuyo cubo se aproxima más a 12167 es 20. Como $20^3 = 8000$ se puede escribir la igualdad:

$$12167 = 8000 + 4167$$

Por otra parte, $3 \times 20^2 = 1200$. Si dividimos 4167 entre 1200 se obtiene 3 por cociente y un residuo de 567, indicando que 3 es la cifra de las unidades de la raíz. El algoritmo de la división permite escribir:

$$\begin{aligned} 4167 &= 3 \times 1200 + 567 \\ &= 3600 + 567 \\ &= 3 \times 20^2 \times 3 + 567 \end{aligned}$$

Pero 567 se puede descomponer en dos sumandos así

$$\begin{aligned} 567 &= 540 + 27 \\ &= 3 \times 20 \times 3^2 + 3^3 \end{aligned}$$

Finalmente se llega a las igualdades que siguen:

$$\begin{aligned} 12167 &= 8000 + 4167 \\ &= 8000 + 3600 + 567 \\ &= 8000 + 3600 + 540 + 27 \\ &= 20^3 + 3 \times 20^2 \times 3 + 3 \times 20 \times 3^2 + 3^3 \\ &= (20 + 3)^3 \\ &= 23^3 \end{aligned}$$

Usando la última igualdad se concluye que $\sqrt[3]{12167} = 23$.

El algoritmo para hallar las raíces cúbicas se enuncia de la siguiente manera: Se divide el número en períodos de tres cifras comenzando por las unidades, el último de los cuales puede tener una o dos cifras. Se extrae la raíz cúbica al primer período de izquierda a derecha y esta será la primera cifra de la raíz. Se eleva al cubo y este cubo se resta del primer período. A la derecha del resultado se escribe el segundo período y se separan con un punto las dos primeras cifras de la derecha y lo que queda a la izquierda se divide entre el triple del cuadrado de la raíz hallada. El cociente representa

la segunda cifra de la raíz o una cifra mayor. Se forman tres sumandos: 1º) El triple del cuadrado de la primera cifra de la raíz por la segunda por 100. 2º) El triple de la primera cifra de la raíz por el cuadrado de la segunda por 10. 3º) El cubo de la segunda cifra de la raíz. Si el total anterior se puede restar del número del cual separamos las dos cifras de la derecha, la cifra hallada es correcta y se escribe en el resultado; en caso contrario, se disminuye en una unidad o más hasta cuando se pueda restar. Efectuada la resta se escribe a la derecha el siguiente período y se repiten las operaciones hasta haber bajado el último.

Para $\sqrt[3]{12167}$ el procedimiento se muestra a continuación.

$\sqrt[3]{12 \cdot 167}$	23
$-\ 8$	$3 \times 2^2 = 12$
$41 \cdot 67$	$41 \div 12 = 3$
$-41\ \ 67$	$3 \times 2^2 \times 3 \times 100 = 3600$
0	$3 \times 2 \times 3^2 \times 10 = 540$
	$3^3 = 27$
	4167

Al separar los dos períodos se descompuso a 12167 en dos sumandos; esto es $12000 + 167$. La raíz cúbica aproximada de 12000 es 20, por tanto el cubo de 20 es 8000. Por lo anterior establecemos la siguiente igualdad:

$$12167 - 8000 = 4167$$

Esta diferencia significa bajar el segundo período. Al separar las dos últimas cifras de la derecha de 4167 lo que se hizo fue escribir este resto mediante la suma $4100 + 67$. El cuadrado de la raíz es 400 y el triple de este es 1200.

Al dividir 4100 entre 1200 se obtiene 3, resultado que corresponde a la segunda cifra de la raíz. La suma de los tres productos no es otra cosa que la igualdad

$$\begin{aligned} 4167 &= 3600 + 540 + 27 \\ &= 3 \times 20^2 \times 3 + 3 \times 20 \times 3^2 + 3^3 \end{aligned}$$

Esto es: el triple del cuadrado de 20 más el triple de 20 por el cuadrado de 3 más el cubo de 3.

Como $20^2 = 2^2 \times 100$ es obvio que $20 = 2 \times 10$, razón por la cual el primer sumando se multiplica por 100 y el segundo por 10.

La siguiente igualdad, permite hallar raíces cuartas.

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

Como ilustración tenemos el siguiente ejercicio.

Hallar la raíz cuarta de 6561.

$$\begin{aligned} 6561 &= 10000 - 4000 + 600 - 40 + 1 \\ &= 10^4 - 4(10)^3(1) + 6(10)^2(1)^2 - 4(10)(1)^3 + 1^4 \\ &= (10-1)^4 \\ &= 9^4 \end{aligned}$$

En conclusión: $\sqrt[4]{6561} = 9$.



SISTEMAS DE NUMERACIÓN

La invención de un sistema de numeración tomó muchos milenios a la humanidad. Los pueblos primitivos trajinaban con conjuntos muy reducidos y los valoraban o comparaban sin conocerlos. Representaciones de las alas de un pájaro, el trébol, las patas del perro, los dedos de la mano, funcionaron como precursores de nuestros $2, 3, 4, 5$. Fueron necesarios muchos siglos para que nuestra civilización comprendiese que el día y la noche, un hombre y una mujer son expresiones de una misma relación cuantitativa: ser par, que más tarde fue llamada el cardinal «2». Además, la inteligencia humana fue capaz de desarrollar el grado de abstracción que le permitió contar y leer patrones simétricos en la percepción de la pluralidad, que en definitiva condujo al moderno concepto de número.

Con este mismo enfoque histórico podemos analizar los sistemas de numeración como el quinario, en el cual las unidades se agrupan de cinco en cinco. Así, a una colección de cinco unidades se le llamó «quina». Siete unidades son, entonces, una quina más 2, lo que corresponde a 12. El hábito de contar con los dedos de las manos y el hecho de la inclusión del cero por los matemáticos hindúes y árabes, que no utilizaban los griegos porque no representaba cantidad alguna, dio paso a la escritura de un número cualquiera por medio de las combinaciones de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

El gran descubrimiento fue hallar un procedimiento para nombrar y representar todos los números con un conjunto reducido de palabras y símbolos, que es el objetivo de cualquier sistema de numeración.

La mayoría de los sistemas de numeración se fundamenta en un número clave llamado base del sistema, que en el hindú-arábico o decimal es el 10. Los

símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se denominan *dígitos*. Si la base es mayor que 10 debemos buscar símbolos para sustituir los dígitos mayores que 9. Para la base 12, hacemos $10 = \alpha$, $11 = \beta$. Así las cosas, con dicha base podemos escribir números tales como $507\beta34$, $87\alpha35$, 4129, $\beta03$, y así sucesivamente.

Siempre se ha pensado que el sistema duodecimal sería muy práctico porque 12 tiene más divisores primos que 10 y se puede agrupar mejor por docenas que por decenas, pero lo cierto es que el sistema decimal está muy adherido al desarrollo de la humanidad. El sistema binario o de las potencias de 2 ha sido popularizado por las computadoras. La tecnología de estos artefactos está basada en los códigos de verdadero-falso, apagado-encendido. El sistema binario está conformado por los dígitos $0, 1$, lo que constituye una aparente desventaja debido a que se necesita una cantidad grande de dígitos binarios para escribir cualquier número, por ejemplo $1325 = 10100101101_2$.

De acuerdo con el algoritmo de la división, al dividir un entero cualquiera n entre t se obtiene la igualdad:

$$n = qt + r$$

Donde q es el cociente y r es el residuo, resto que debe ser un número entre 0 y $(t-1)$. Bajo estas condiciones para representar los "dígitos" del sistema se utiliza la colección:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, (t-1)$$

Si en lugar de agrupar en potencias de 10 lo hacemos mediante potencias de 5, cualquier entero tendrá su respectiva representación polinómica en grupos de 5. Veamos con ejemplos cómo es esto posible.

$$\begin{aligned} 143 &= 125 + 15 + 3 \\ &= 1 \times 5^3 + 3 \times 5 + 3 \\ &= 1 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 3 \times 5^0 \end{aligned}$$

Un grupo de 5 al cubo, más cero grupos de 5 al cuadrado, más tres grupos de 5, más tres grupos de 5 a la cero.

$$\begin{aligned} 642 &= 625 + 15 + 2 \\ &= 1 \times 5^4 + 3 \times 5 + 3 \\ &= 1 \times 5^4 + 0 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 2 \times 5^0 \end{aligned}$$

Un grupo de 5 a la cuarta, más cero grupos de 5 al cubo, más cero grupos de 5 al cuadrado, más tres grupos de 5, más dos grupos de 5 a la cero.

$$\begin{aligned} 21 &= 20 + 1 \\ &= 4 \times 5 + 1 \\ &= 4 \times 5^1 + 1 \times 5^0 \end{aligned}$$

Cuatro grupos de 5 más un grupo de 5 a la cero.

Debido a que al dividir por 5 los residuos posibles son 0, 1, 2, 3 o 4, estos cinco elementos son considerados los "dígitos" cuando 5 se toma como base; dicha situación nos lleva a establecer las igualdades:

$$143 = 1033_5$$

$$642 = 10032_5$$

$$21 = 41_5$$

Estas deben leerse en el orden respectivo: Uno cero tres tres base cinco, uno cero cero tres dos base cinco, cuatro uno base cinco.

10.1. Cambio de bases

Paso de un número escrito en base t a la base decimal.
Sean $t > 1$ una base cualquiera, n un número escrito en dicha base.

$$n = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t^1 + a_0$$

Esta igualdad proporciona una regla práctica para escribir el número n en base 10.

Primero desarrollamos todas las potencias de t, desde la cero hasta la m-ésima, después efectuamos todos los productos y por último procedemos a sumarlos. Si realizamos las operaciones en base 10 el resultado será la representación de n en base decimal.

Escribir en base 10 el número $2\alpha\beta_{12}$.

Las tres primeras potencias de 12 son $1, 12, 144$.

$$\begin{aligned} 2\alpha\beta_{12} &= 2 \times 144 + 10 \times 12 + 11 \times 1 \\ &= 288 + 120 + 11 \\ &= 419 \end{aligned}$$

Paso de un número escrito en base 10 a base t.
Sean $t > 1$ una base cualquiera, n un número escrito en base 10 y

$$n = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t^1 + a_0$$

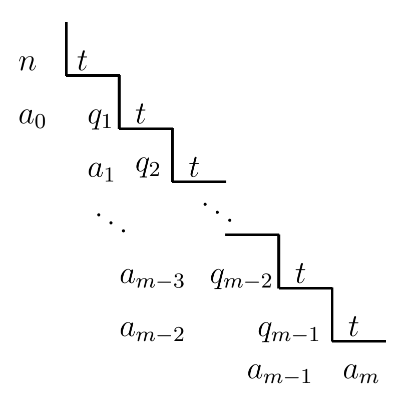
la expresión de n conformada por grupos de potencias de t. Del segundo miembro, y teniendo en cuenta que los valores absolutos de los dígitos son siempre menores que la base, se deduce que si dividimos n por t se obtiene un cociente q_1 y a_0 de residuo, resto que corresponde al primer dígito, leyendo de derecha a izquierda.

$$n = (a_m t^{m-1} + a_{m-1} t^{m-2} + \cdots + a_1)t + a_0$$

De esta igualdad observamos que aj dividir por segunda vez por t obtenemos nuevos cocientes y residuos q_2 y a_1, respectivamente, residuo que corresponde al segundo dígito, leyendo en el mismo orden.

$$n = [(a_m t^{m-2} + a_{m-1} t^{m-3} + \cdots + a_3 t + a_2)t + a_1]t + a_0$$

Después de reiteradas operaciones llega un momento en que se obtienen por cociente y residuo finales a_m y a_{m-1}, respectivamente, números que corresponden a los dos últimos dígitos de n en base t. Las operaciones anteriores se pueden representar en un gráfico así:



Este gráfico nos dice que para pasar de un número escrito en base 10 a una base cualquiera t dividimos el número dado (operando en base 10) sucesivamente por t hasta que lleguemos a un cociente menor que la base, después tomamos el último cociente y todos los residuos encontrados, pero en sentido retrógrado y estos valores serán las cifras del número de izquierda a derecha.

Hay que notar que si t es mayor que 10 los residuos pueden ser 10 o mayores y entonces tenemos que sustituir esos residuos por los símbolos que le corresponden en ese sistema. Con las consideraciones anteriores

$$n = a_m a_{m-1} a_{m-2} \dots a_1 a_0$$

Para escribir el número 12804_{10} en base 12 tome $10 = \alpha$, $11 = \beta$.

Efectuando las divisiones sucesivas:

$$\begin{array}{r|l}
12804 & 12 \\ \cline{2-2}
0 & \begin{array}{r|l} 1067 & 12 \\ \cline{2-2} 11 & \begin{array}{r|l} 88 & 12 \\ \cline{2-2} 4 & 7 \end{array} \end{array}
\end{array}$$

El número escrito en base 12 es $74\beta0_{12}$.

Escribir en base 5 el número 72_{10}.

$$\begin{array}{r|l}
72 & 5 \\ \cline{2-2}
2 & \begin{array}{r|l} 14 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 2 \end{array}
\end{array}$$

La respuesta es 242_5.

10.2. Operaciones en base cualquiera

Un procedimiento para operar números en cualquier base (pero todos en la misma) sería pasarlos a la base 10, efectuar las operaciones y el resultado devolverlo luego a la base original. Para cantidades pequeñas, otro método consiste en operar en la base respectiva teniendo el cuidado de recordar que opera en base diferente a la decimal con el fin de evitar equívocos.

Cuando hay que realizar muchas operaciones lo mejor es utilizar una tabla. Para construir una tabla de sumar, que puede utilizarse para restar, se escribe en fila la sucesión de los números hasta donde se quiera, pero por lo menos hasta agotar los dígitos. Debajo de esa primera fila se escriben los mismos números agregados en la unidad, la tercera será igual a la segunda más la unidad, y así sucesivamente. Para sumar dos números se toma uno en la primera columna y el otro en la primera fila; la suma estará en la

intersección de la columna y fila que encabezan los sumandos, aunque la propiedad conmutativa permite tomarlos sin importar cuál se toma en la fila y cuál en la columna. A continuación se construye una tabla de sumar en base 5.

+	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21
1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22
2	3	4	10	11	12	13	14	20	21	22	23
3	4	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24
4	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30
10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31
11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32
12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32	33

Sumar: $1111_2 + 1010_2 + 110_2 + 11101_2$.

Tomando las primeras cifras de derecha a izquierda (unidades) y operando en base dos:

$$1 + 0 + 0 + 1 = 1 + 1 = 10$$

Se escribe 0 en la primera posición del resultado y se traslada 1 a la segunda posición. Tomando las cifras de la segunda posición más 1 que se traslada, se obtiene:

$$1 + (1 + 1 + 1 + 0) = 1 + (11) = 100$$

Se scribe 0 en la segunda posición y se traslada 10 a la tercera. Tomando las cifras de la tercera posición más 10, se escribe:

$$10 + (1 + 0 + 1 + 1) = 10 + (11) = 101$$

Se escribe 1 en la tercera posición y se traslada 10 a la cuarta. Tomando las cifras de la cuarta posición más 10, se tiene:

$$10 + (1 + 1 + 0 + 1) = 10 + 11 = 101$$

Se escribe 1 en la cuarta y se traslada 10 a la quinta. Tomando las cifras de la quinta posición más 10, se obtiene:

$$10 + (0 + 0 + 0 + 1) = 11$$

Esta cifra corresponde al último resultado. Finalmente, escribiendo de izquierda a derecha se obtiene el total: 111100_2.

La suma en forma compacta, se escribe:

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ +\quad 1\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0\,1 \\ \hline 1\,1\,1\,1\,0\,0 \end{array}$$

Efectuar la diferencia 22023_7 - 4625_7.

Tomando el desarrollo polinómico de 22023 en base siete:

$$\begin{aligned} 22023 &= 2 \times 7^4 + 2 \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 2 \times 7 + 3 \\ &= 1 \times 7^4 + 11 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 11 \times 7 + 13 \end{aligned}$$

Recuerde que estamos haciendo un desarrollo en base 7. El desarrollo polinómico de 4625 es:

$$4625 = 4 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 2 \times 7 + 5$$

Ahora basta con efectuar las respectivas restas así,

$$13 - 5 = 5$$

$$11 - 2 = 6$$

$$6 - 6 = 0$$

$$11 - 4 = 4$$

$$1 - 0 = 1$$

Tomando los resultados en orden ascendente y escribiéndolos de izquierda a derecha, la respuesta obtenida es 14065_7. En forma compacta:

$$\begin{array}{r} 2\,2\,0\,2\,3 \\ -\;4\,6\,2\,5 \\ \hline 1\,4\,0\,6\,5 \end{array}$$

Una tabla de multiplicar que también sirve para dividir se construye escribiendo la sucesión de los números de la base en el sistema en referencia a partir de 1. En la segunda fila, en correspondencia con la primera, se escribe el resultado de sumar la primera fila con ella misma. La tercera se obtiene

sumando la segunda con la primera. La cuarta es el resultado de sumar la primera con la tercera; así sucesivamente cada nueva fila se obtiene sumando la primera con la última obtenida. Para hallar el producto de dos números se toman los factores y se procede en forma similar a la suma. La siguiente es una tabla de multiplicar en base 5.

×	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21
1	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	21
2	2	4	10	13	20	22	24	31	33	40	42
3	3	11	13	22	30	33	41	44	102	110	113
4	4	13	21	31	40	44	103	112	121	130	134
10	10	20	24	40	100	110	120	130	140	200	210
11	11	22	32	44	110	121	132	143	204	220	231
12	12	24	40	103	120	131	144	211	223	240	302

En base 4 se opera de manera semejante a la base 10. Examinemos el siguiente producto:

Se dispone el producto de manera ordinaria.

$$\begin{array}{r}
10213 \\
\times\ 221 \\
\hline
10213 \\
21032 \\
21032 \\
\hline
2330333
\end{array}$$

El resultado es 2330333_4.

Finalmente se da solución a la siguiente división en base cinco.

Dividir 23124_5 entre 32_5.

La operación se dispone así:

$$\begin{array}{rl}
2\,3\,1'2'4' & \underline{|\;3\,2\quad} \\
-2\,0\,1 & \;\;3\,4\,2 \\
\hline
3\,0\,2 & \\
-2\,3\,3 & \\
\hline
1\,4\,4 & \\
-1\,1\,4 & \\
\hline
3\,0 &
\end{array}$$

El algoritmo se desarrolla de la siguiente forma. Se toman las tres primeras cifras de la izquierda del dividendo, esto es 231. El número que multiplicado por 32 se aproxima más a 231 es 3. Se multiplica 32×3.

$$32 \times 3 = 201$$

Se efectúa la diferencia:

$$231 - 201 = 30$$

A 30 se le agrega la cuarta cifra del dividendo, obteniéndose 302. El número que multiplicado por 32 se aproxima más a 302 es 4. Se multiplica 32×4.

$$32 \times 4 = 233$$

Se realiza la diferencia:

$$302 - 233 = 14$$

Tomando la última cifra del dividendo, 4, y agregándola a 14 se obtiene 144. El número que multiplicado por 32 se aproxima más a 144 es 2. Al multiplicar 32×2:

$$32 \times 2 = 114$$

La diferencia:

$$144 - 114 = 30$$

Se produce el residuo 30. El cociente es 342_5.

Capítulo 11

HACIA EL ÁLGEBRA

Los orígenes históricos de lo que hoy llamamos conceptos matemáticos, esto es, los que tienen que ver con número, magnitud y forma son encontrados en la civilización que floreció en los valles de los ríos de China, Egipto, India y Mesopotamia en los primeros siglos del segundo milenio antes de Cristo, especialmente en los del Nilo, Tigris y Éufrates.

El historiador Heródoto escribió que los impuestos a los agricultores del valle del Nilo eran calculados de acuerdo con el área, de manera que cuando el río inundaba las tierras el propietario pedía rebaja del gravamen, lo que indujo al gobierno a desarrollar técnicas elementales de medición. Calcularon el área de la circunferencia mediante la fórmula $(\frac{8}{9})^2 \times d^2$, donde d representa el diámetro y obtuvieron una aproximación para π de $3,16$.

Hoy se sabe que los babilonios desarrollaron mejor la matemática que los egipcios. Dieron solución a problemas que involucran ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas, usaron con propiedad el sistema sexagesimal de numeración y calcularon una buena aproximación de $\sqrt{2}$ mediante la expansión:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,414213$$

El estudio de la aritmética y la geometría desarrollado por egipcios y babilonios fue asimilado por los griegos, quienes le dieron el carácter lógico y deductivo con que se conoce hoy. Pitágoras, de quien se dice que murió en el año 500 antes de Cristo, estableció una sociedad secreta conocida como Los Pitagóricos, que continuó después de su muerte.

Las fracciones no las asumieron como números sino como razones de enteros. Miradas desde el punto de vista moderno no son otra cosa que parejas

ordenadas. Esta teoría fue aplicada a las nociones de longitud, área y volumen.

Consideraban que dos segmentos de línea cualquiera eran conmensurables, esto es, múltiplos de una unidad común. Con este presupuesto, las razones y las proporciones las extendieron a longitudes y áreas de figuras simples como segmentos y rectángulos.

11.1. Los números enteros

En la práctica diaria los estudiantes se encuentran con situaciones que tienen que ver con cantidades que son imposibles de representar con los números naturales. Estas son experiencias o fenómenos de la siguiente naturaleza:

1. Temperaturas por debajo de cero grados.
2. Cuentas regresivas.
3. Disminución gradual de la velocidad de un automóvil.
4. Estados financieros donde las deudas superan los ingresos.
5. Lugares ubicados por debajo del nivel del mar.
6. Restas de la forma $a - b$, donde a es menor que b.

En general, cualquier concepto que se pueda cuantificar y posea una dirección es susceptible de presentar situaciones imposibles de describir con números positivos. Para todos los casos descritos anteriormente es imprescindible el uso de los números negativos. Antes de proceder a operar con estos números es conducente estudiar algunos modelos.

La calculadora es un instrumento muy útil para explorar el comportamiento de los números enteros porque produce resultados de mucha credibilidad para el estudiante y no induce a la rutina. Pida a los alumnos digitar un número menor que 9, como el 4, y que le resten 1. A continuación dígales que presionen la tecla $=$ reiteradamente hasta cuando la pantalla muestre 0. A partir de 0 que presionen nuevamente $=$ varias veces y se detengan, por ejemplo, cuando aparezca -3. Pare el proceso y pregunte por la respuesta en caso de volver a digitar $=$.

Para digitar un negativo, con cualquier calculadora se presiona el número correspondiente seguido de la tecla de cambio de signo, la que ordinariamente

aparece como $\pm$. La operación $6\pm$ produce como resultado -6. Este hecho sirve para encontrar el inverso aditivo de cualquier entero.

De acuerdo con esta idea, la operación $5 + 5\pm =$ produce el resultado:

$$5 + (-5) = 0$$

Por su parte, $8 \pm +8 =$ produce:

$$(-8) + 8 = 0$$

Por otro lado, $9 \pm +3 =$ realiza la operación:

$$-9 + 3 = -6$$

Si en su calculadora la tecla de cambio de signo es "$+/-$" efectúe los cambios correspondientes.

El anterior procedimiento sirve para realizar cualquier tipo de sumas o diferencias entre números enteros.

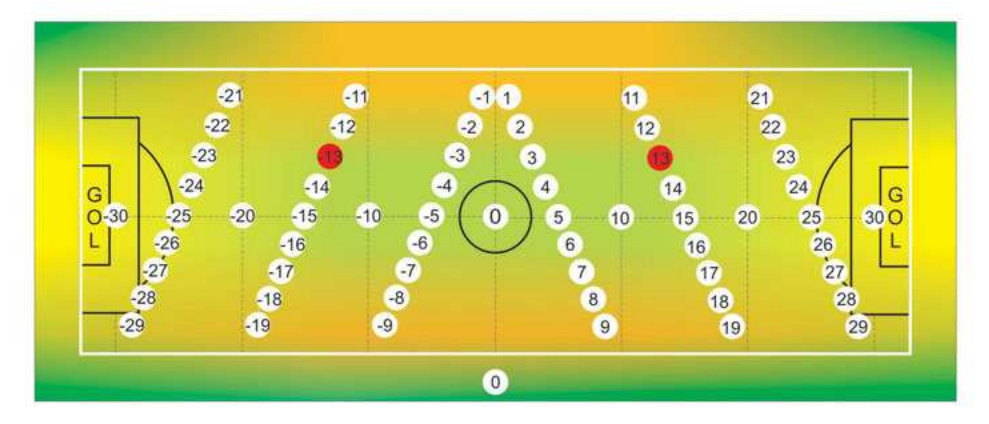
11.1.1. Un modelo matemático para jugar fútbol

El campo en el que se juega fútbol es de forma rectangular, el largo mide aproximadamente 100 metros y el ancho 64. A las líneas que limitan el terreno se les llama líneas de banda o laterales, los márgenes más cortos se denominan líneas de gol. Centradas en las líneas de gol se ubican las porterías, cuyos palos horizontales miden 7,32 metros y los verticales 2,44. En el centro se dibuja una circunferencia denominada círculo central, donde se ubica el balón para ejecutar el saque inicial.

Un partido consta de 11 jugadores por equipo y se juega durante 90 minutos divididos en dos partes o tiempos de 45 minutos cada uno y un descanso de 15. Al iniciar se coloca la bola en el círculo central y se da comienzo al encuentro. El objetivo de cada equipo es ir avanzando hasta la zona que defiende el contrario, con el fin de doblegar al portero defensor al introducir el balón en la portería.

Un modelo matemático para jugar fútbol es viable si se concibe un campo conformado por un punto al que se le asigna el nombre de círculo central ubicado en el cero. El campo izquierdo se marca con números negativos a partir de cero en la forma $-1, -2, -3, \ldots, -30$ y el derecho se enumera desde 1 hasta 30. Cualquier posición en el terreno se determina por un número entre

-30 y 30, ubicaciones a las que se les denomina yarda, seguida del número respectivo. Con el propósito de fijar criterios a los equipos se les llama *positivo* y *negativo*. El *negativo* se mueve en sentido negativo, esto es, de derecha a izquierda mientras que el *positivo* avanza en sentido contrario. Para cada equipo anotar puntos significa avanzar y perderlos implica retroceder.



Con este modelo se efectúan sumas o restas cuyos resultados oscilen entre -30 y 30. Dados un punto inicial y un punto final se pide al estudiante describir diferentes jugadas de acuerdo con el equipo que tenga el balón; por ejemplo cómo se puede pasar de la yarda 11 a la -7 si el equipo *negativo* tiene la posesión del esférico.

Para reforzar el uso del modelo proponga jugar partidos realizando torneos en el aula. Con este fin se establecen reglas de la siguiente forma:

1. Usar dos fichas de parqués para ubicar las posiciones y dos dados marcados del 0 al 5. En caso de tener los tradicionales, al 6 se le asigna el valor cero. Por ejemplo, una lectura de 6 y 3 se interpreta como 3 y el doble seis se interpreta como cero.

2. Cada equipo puede conformarse con uno o dos jugadores. El juego consta de un único tiempo cuya duración es determinada con anterioridad.

3. Los equipos se nombran *positivo* y *negativo*. El primero se mueve de izquierda a derecha mientras que el segundo lo hace en sentido contrario. Para cada equipo anotar puntos significa avanzar yardas y perderlos implica retroceder.

4. Una lectura impar, esto es 1, 3, 5, 7, 9, permite avanzar 1, 3, 5, 7 o 9 yardas, respectivamente, y seguir usando los dados.

5. Una lectura par diferente de cero, esto es 2, 4, 6, 8, 10, obliga a retroceder 2, 4, 6, 8 o 10 yardas, respectivamente, y perder el uso de los dados.

6. Una lectura de cero (doble seis en los dados tradicionales) permite permanecer en el mismo sitio sin avanzar ni retroceder. pero perder el uso de los dados.

7. El equipo *positivo* anota un gol cuando logra ubicarse en la yarda 30; por el contrario, el *negativo* anota cuando se ubica en la -30. Al anotarse un gol se vuelve al círculo inicial y el control queda en poder del equipo a quien le anotaron el tanto.

8. Si por circunstancias del juego, el equipo *positivo* se ubica en la yarda -30, anota un autogol, el cual se le marca al equipo *negativo*, y viceversa.

9. La yarda marcada con -25 es zona de cobro de pena máxima para el equipo *negativo* y la marcada con 25 lo es para el *positivo*.

10. La yarda 20 es zona de penalty a favor del equipo *positivo* y -20 lo es para el *negativo*. Lo anterior significa que si al ejecutar una jugada el equipo *positivo* queda ubicado en 20, automáticamente debe avanzar a la yarda 25, sigue con el uso de los dados e inicia el cobro de la penalización. Si por el contrario, el equipo *negativo* queda en -20, automáticamente debe avanzar a la yarda -25 y sigue con el turno para lanzar los dados e iniciar el cobro de la penalización.

11. Al ejecutar el cobro de un penalty, si se tiene una lectura de cero se debe permanecer en la zona de cobro y la pelota va al tiro de esquina, lo que indica que se puede repetir la jugada. Si se producen lecturas de 1 o 3 se avanza 1 o 3 yardas, respectivamente. Si las lecturas son de 5, 7 o 9 se anota un gol. Si las lecturas son de 2, 4, 6, 8 o 10 se deben retroceder las yardas respectivas.

12. Las áreas 13 y -13 son zonas de falta por mano para ambos equipos, lo que obliga al equipo penalizado a retroceder tres yardas y perder el turno en el uso de los dados. Lo anterior significa que cualquier equipo que quede ubicado en -13 o 13 debe retroceder 3 yardas y ceder el turno para lanzar los dados.

13. En el evento de producirse un empate el marcador se decidirá mediante el cobro de pena máxima; esto quiere decir que cada equipo se ubicará por turnos en la yarda 25 o -25 para ejecutar el respectivo cobro. En este caso se anotará gol solo con una de las lecturas 5, 7 o 9, en las demás significa que el portero capturó el balón.

Para que el juego cumpla con su objetivo didáctico se recomienda realizar las operaciones correspondientes teniendo en cuenta lo siguiente: para el equipo positivo avanzar significa sumar puntos positivos, y retroceder sumar puntos negativos. Por su parte, el negativo avanza si suma puntos negativos y retocede si adiciona puntos positivos.

Por ejemplo, si el equipo *positivo* se encuentra en la yarda 2 y gana 3 puntos, al final quedará en la yarda 5. Este hecho se representa por la operación:

$$2 + 3 = 5$$

Si está ubicado en la yarda 4 y pierde 6 pasará a la yarda -2, esto es:

$$4 + (-6) = 4 - 6 = -2$$

Con referencia al *negativo*, si se encuentra en la yarda -8 y gana 5 puntos quedará ubicado en la yarda -13, o sea:

$$-8 + (-5) = -8 - 5 = -13$$

Si se encuentra en -7 y pierde 10 puntos quedará en la yarda 3, situación representada por:

$$-7 + 10 = 3$$

11.2. Operaciones con los enteros

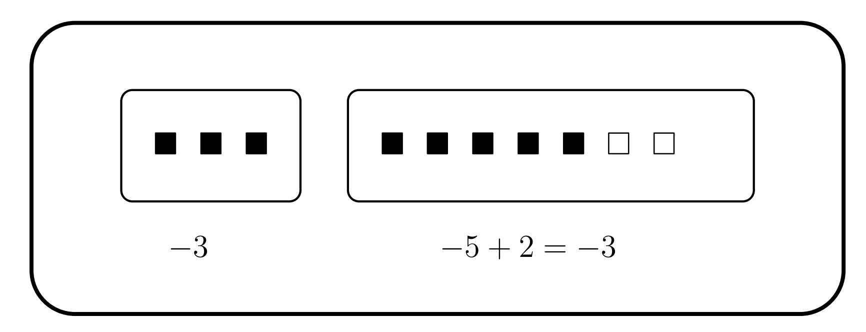
Matemáticamente un negativo se define a través de los naturales. La definición del negativo -7 es la solución de la igualdad $7 + \square = 0$. En general, si n es positivo, el negativo $-n$ es la solución de $n + \square = 0$. Si n es positivo el inverso aditivo de n es negativo, y viceversa.

El conjunto de los enteros se define como la unión de los positivos, los negativos y 0*, que no es positivo ni negativo.*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^+ \cup \{0\} \cup \{-n \mid \ n \ \in \mathbb{N}^+\}$$

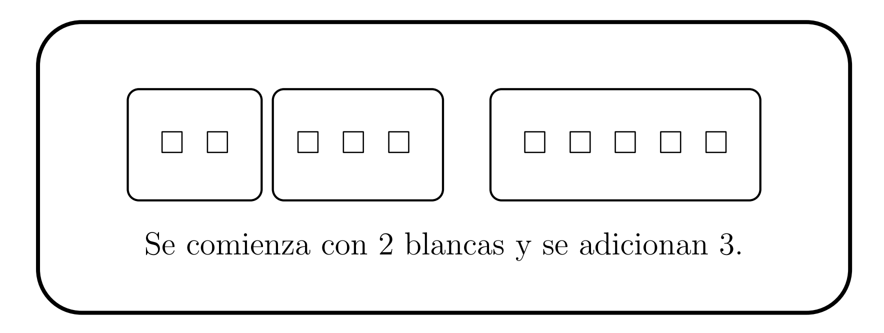
En matemática, un concepto abstracto es entendido mejor cuando se visualiza a través de modelos. Para alguien sin los conocimientos previos la definición de negativo es relativamente vaga y difícil de asimilar. Pero tenga siempre presente que *los modelos solo sirven para mostrar lo que hay detrás de los conceptos*. En otras palabras, no deben usarse en las demostraciones formales de la teoría estudiada.

Un modelo interesante para introducir las operaciones con los enteros consiste en representarlos con cuadrados de dos colores, por ejemplo, blancos para los positivos y negros para los negativos, así: □ ■. Se utiliza la convención descrita para el minicomputador de Papy, es decir un cuadrado blanco elimina uno negro, y lo contrario. Con estas condiciones, los que siguen son dos modelos para representar a -3.



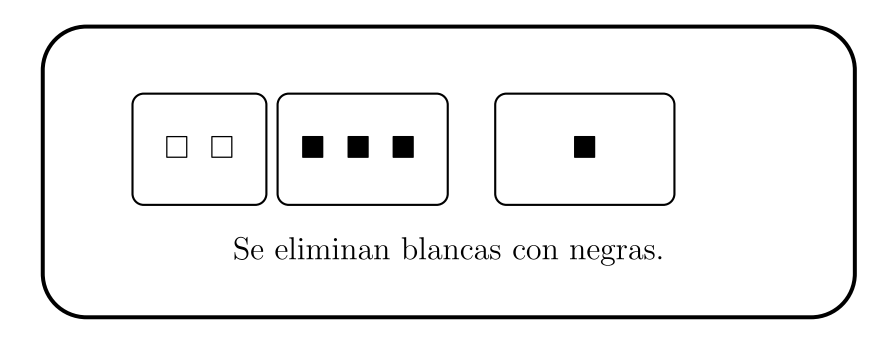
Teniendo en cuenta que sumar lo tomamos como sinónimo de agregar, y restar como quitar o remover, y teniendo presente que blancos y negros se eliminan mutuamente, veamos algunos ejemplos de sumas y restas.

1) Sumar dos cantidades positivas o negativas: $2+3=5$.

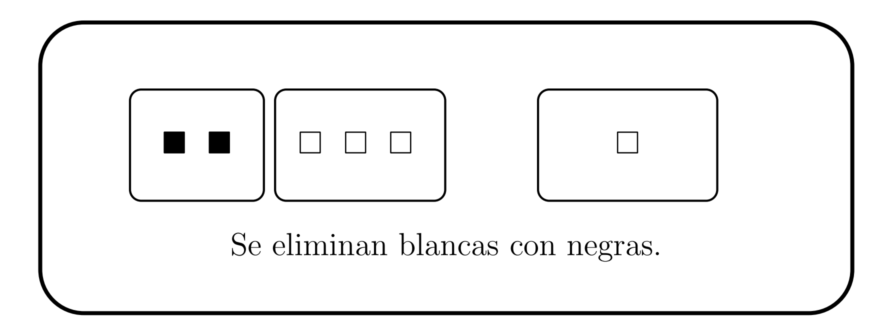


En caso de sumar dos cantidades negativas basta con cambiar al color negro.

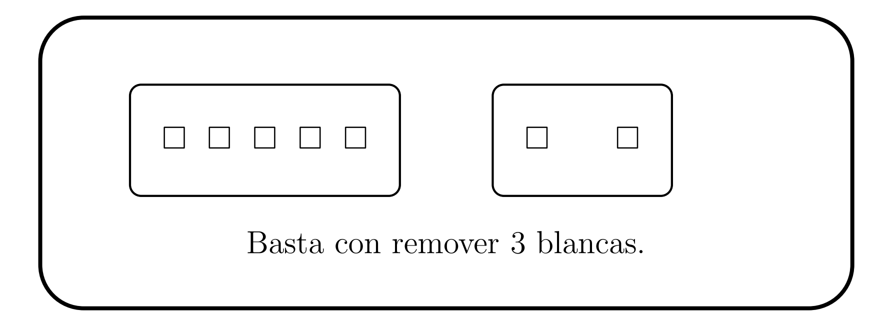
2) A una cantidad positiva sumarle una negativa: $2+(-3)=-1$.



3) A una cantidad negativa sumarle una positiva: $-2 + 3 = 1$.

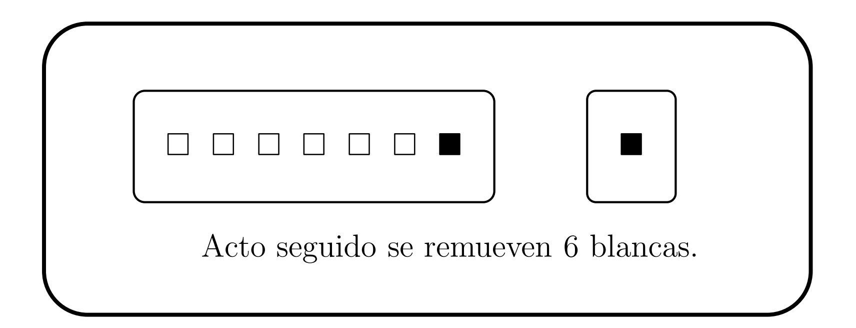


4) A una cantidad positiva restarle una positiva menor: $5 - (+3) = 2$.

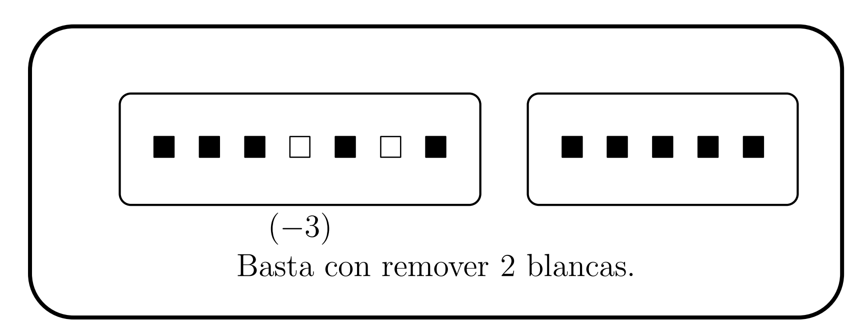


5) A una cantidad positiva restarle una positiva mayor: $5 - (+6) = -1$.

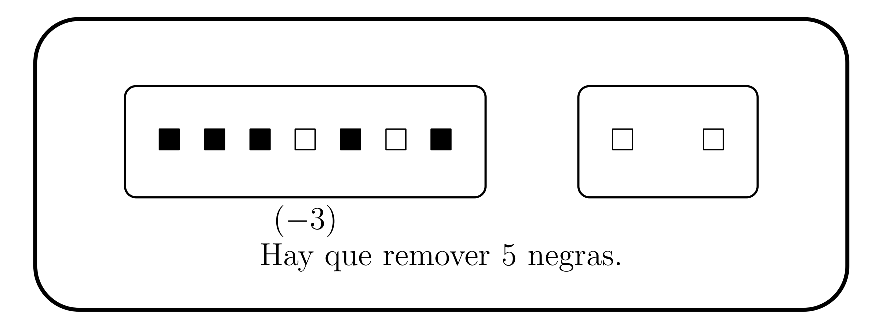
En este caso hay que escoger un modelo apropiado para el minuendo. Para este ejemplo, el 5 se representó mediante seis blancas y una negra, lo que permite al final retirar seis blancas.



6) A una cantidad negativa restarle una positiva: $-3 - (+2) = -5$. En este caso el modelo de la cantidad negativa hay que representarlo mediante una combinación de negras y blancas.

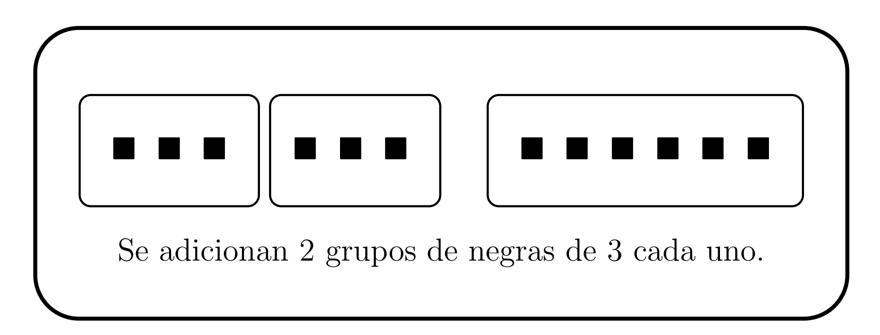


7) A una cantidad negativa se le resta una negativa: $-3 - (-5) = 2$.



El producto de enteros *es una extensión de esta misma operación con los naturales*, es decir una suma repetida. El primer factor o multiplicador, como se dijo, representa el número de conjuntos o el número de veces por sumar, comenzando con 0. Este hecho facilita las cosas cuando el multiplicador es positivo sin importar el signo del multiplicando.

Multiplicar 2 por -3 significa reunir dos grupos de tres negras cada uno para obtener un total de 6 negras.



El anterior es un modelo para el producto $2 \times (-3)$ donde se puede ver que

$$2 \times (-3) = -6$$

Al iniciar con 0 y restar sucesivamente un natural, por ejemplo 4 se obtiene la sucesión decreciente

$$\{-4, -8, -12, \dots\}$$

Cuyos elementos son estrictamente negativos, *lo que nos permite ver el producto por negativos como una resta reiterada a partir de* 0. Con este presupuesto, la sucesión anterior se escribe en la forma

$$\{(-1) \times 4, (-2) \times 4, (-3) \times 4, \dots\}$$

De donde se derivan las igualdades que siguen.

$$(-1) \times 4 = -4$$

$$(-2) \times 4 = -8$$

$$(-3) \times 4 = -12$$

$$\vdots$$

En las condiciones anteriores, por ejemplo el producto $(-3) \times 4$, se representa por la igualdad:

$$(-3) \times 4 = -12 = 0 - (4) - (4) - (4)$$

Por otra parte, si queremos restar -12 a partir de 0, *restando sucesivamente* (-4), se deben realizar los siguientes pasos y recordar que para obtener $-(-4)$ hay que presionar las teclas en el orden "$-(4\pm)$" o "$-(4+/-)$", de acuerdo con la función de cambio de signo de la calculadora que esté usando.

$$0-(-4)=4$$

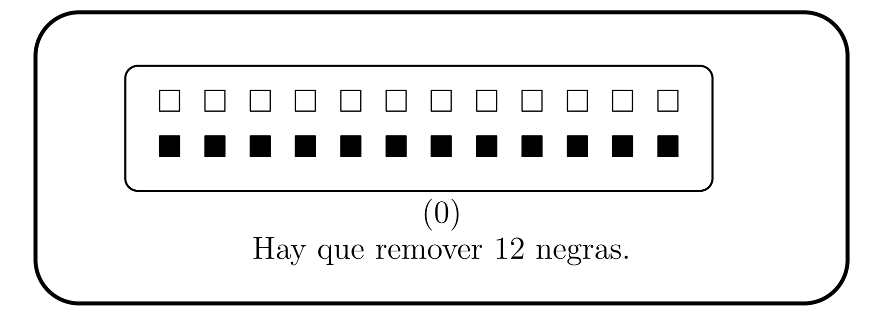
$$4-(-4)=8$$

$$8-(-4)=12$$

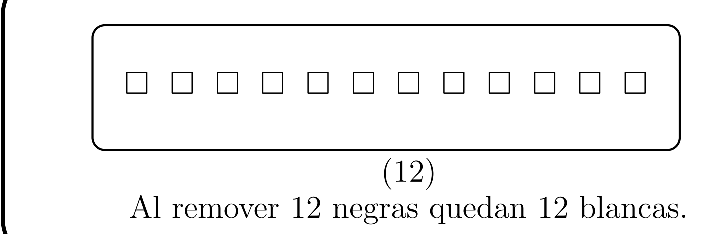
Estas igualdades se expresan diciendo que a partir de 0 se ha restado el entero (-4) *tres veces* o de manera equivalent que se ha efectuado el producto $(-3)\times(-4)$. Pero restar el entero -4 tres veces significa eliminar o remover 12 negras y remover 12 negras a partir de cero equivale a agregar 12 blancas, o en realidad haber sumado 12. Lo dicho permite establecer que

$$(-3)\times(-4)=12$$

El modelo que sigue ilustra la situación.



(0)
Hay que remover 12 negras.



(12)
Al remover 12 negras quedan 12 blancas.

Con los anteriores ejercicios se han ilustrado las leyes de los signos para multiplicar enteros. Es saludable que los estudiantes se conviertan en expertos en el uso de este tipo de modelos para poder asimilar el enunciado formal de las referidas leyes. *Recuerde que las explicaciones conceptuales no hacen que las reglas se faciliten, pero tampoco se pretende que el alumno se limite solo al uso de los modelos.* Lo importante es que no sienta que las leyes de las operaciones son arbitrarias o misteriosas. En la solución de los problemas siempre pida razones válidas.

Para estudiar la división de enteros se debe recordar el significado de esta operación. Por ejemplo, que la expresión $6 \div 3$ tiene dos connotaciones correspondientes a las ecuaciones $3 \times \square = 6$ y $\square \times 3 = 6$. La primera se interpreta con la siguiente expresión: *Hallar tres subconjuntos equinumerosos cuya unión tenga seis elementos* (división por partición o repartición equitativa). La segunda se plantea en términos de investigar *cuántos subconjuntos disyuntos de tres elementos se deben conformar con seis objetos determinados* (división por medida).

Consideremos la segunda situación con la variante de tomar el producto negativo, esto es, $\square \times 3 = (-6)$. *Se trata de investigar qué clase de cantidad es el multiplicador, si el multiplicando es positivo y el producto es negativo.*

Teniendo en cuenta lo estudiado en el producto se establece que,

$$(-2) \times 3 = (-6)$$

Esta conclusión indica que el multiplicador debe ser negativo, y por consiguiente:

$$(-6) \div 3 = (-2)$$

Consideremos la segunda situación con la variante de tomar tanto el producto como uno de los factores negativos, esto es, $\square \times (-3) = (-6)$. *Se trata de investigar qué clase de cantidad es el multiplicador, si el multiplicando es negativo y el producto es negativo.*

Igualmente, se establece que:

$$2 \times (-3) = (-6)$$

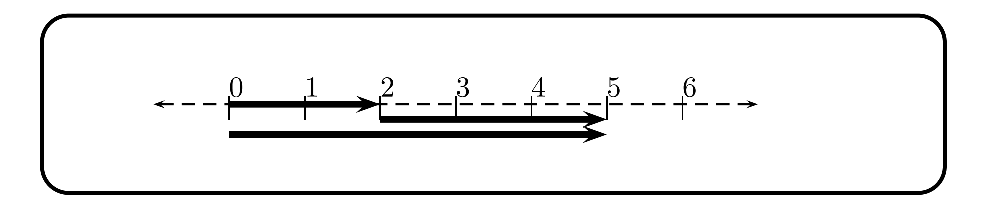
Esta conclusión indica que que el multiplicador debe ser positivo, y por consiguiente:

$$(-6) \div (-3) = 2$$

Otro modelo de uso tradicional es la representación de los enteros en una línea recta, modelo difícil de manejar para muchos estudiantes porque los induce a

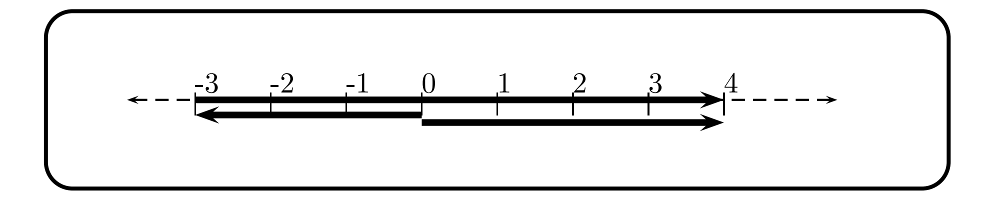
confusiones por la forma indiscriminada como lo usan los maestros. Consiste en asignar distancias tanto a la izquierda como a la derecha, a partir de 0, para designar en su orden a negativos y positivos. Es imprescindible resaltar que con este modelo, *los enteros tanto positivos como negativos, son distancias dirigidas y no puntos en la línea.* Los puntos de la línea forman parte de otro modelo. Según Tom M. Apostol: *Se escoge un punto para representar a* 0 *y otro, a la derecha de* 0*, para representar a* 1*. Esta selección proporciona la escala. Si se adopta un conjunto apropiado de axiomas para la geometría Euclidiana, entonces a cada número le corresponde exactamente un punto de la línea y a cada punto de la línea le corresponde uno y solamente un número* (Apostol, Tom M.,*Calculus*, p. 22). Para hacer énfasis en esta situación se representan los enteros con flechas, evitando referirse a las coordenadas como *números.* Los positivos se representan con flechas apuntando a la derecha y los negativos con flechas apuntando hacia la izquierda. Cada flecha representa una cantidad que posee una longitud, magnitud o valor absoluto y un signo o dirección.

Con el siguiente gráfico se representa la suma $2 + 3$.



El 2 se representa con una flecha con dirección positiva, origen 0 y magnitud dos unidades, 3 es una flecha con dirección positiva, origen 2 y magnitud tres unidades. La respuesta es una flecha con dirección positiva, origen 0 y magnitud cinco unidades.

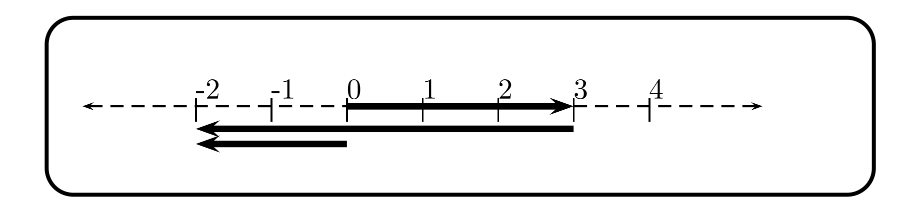
A continuación se representa la suma $7 + (-3)$.



El 7 se representa con una flecha con dirección positiva de origen (-3) y longitud de 7 unidades. Por su parte, (-3) se representa con una flecha con

dirección negativa, origen 0 y longitud 3 unidades. La respuesta es una flecha con dirección positiva, origen 0 y magnitud cuatro unidades.

Finalmente, se presenta el modelo de la suma $3 + (-5)$.



El 3 se representa con una flecha con dirección positiva de origen 0 y longitud de 3 unidades; mientras que (-5) se representa con una flecha con dirección negativa, origen 3 y longitud 5 unidades. La respuesta es una flecha con dirección negativa, origen 0 y magnitud dos unidades.

Multiplicar significa copiar una determinada flecha, sea positiva o negativa; una a continuación de la otra tantas veces como lo indique el multiplicador. Por ejemplo, $3 \times (-2)$ indica copiar tres veces una flecha de origen 0, dirección negativa y longitud 2 unidades, lo cual dará por respuesta una flecha de origen 0, dirección negativa y longitud 6 unidades.

Multiplicar por un negativo significa cambiar de dirección. Por ejemplo, $(-3)\times(-2)$ implica primero cambiar de sentido a (-2), convirtiéndolo en una flecha de origen 0 dirección positiva, y magnitud dos unidades; al reproducirla tres veces dará como respuesta una flecha de origen 0, dirección positiva y magnitud 6 unidades.

Dividir, por su parte, es un proceso similar que implica restar teniendo en cuenta que si el divisor es negativo es necesario primero cambiar la dirección del dividendo.

Si se tiene presente que la razón de enfriamiento de una unidad de refrigeración, ni es constante ni depende exclusivamente del tiempo, se puede plantear el siguiente ejercicio:

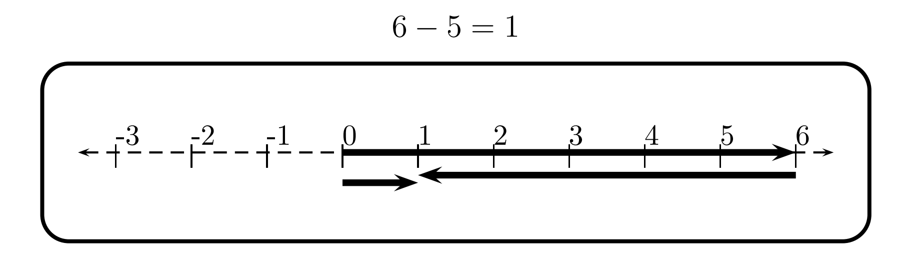
En un procesador de alimentos, la temperatura desciende 2 grados centígrados por minuto. Si la temperatura inicial es de 6 grados, ¿cuál es la lectura del termómetro después de 2 minutos y medio de estar operando el artefacto? ¿En cuánto tiempo se alcanzará una temperatura de -2 grados?

La primera solución consiste en plantear y resolver las igualdades:

$$6 + 2\frac{1}{2}(-2) = 6 + \frac{5}{2}(-2)$$

Efectuando las operaciones pertinentes se deduce la expresión:

$$6 - 5 = 1$$



La solución del segundo interrogante equivale, primero a encontrar la distancia entre 6 y -2, o en otras palabras, avanzar de derecha a izquierda a partir del punto 6, primero 6 unidades y posteriormente 2 más. En términos de valor absoluto, realizar la operación:

$$6 + 2 = 8$$

A continuación dividir 8 entre 2 para concluir que la respuesta es 4 minutos.

-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6

4 3 2 1 0

11.3. Los números racionales

Examinando el proceso de la división de números enteros, por ejemplo $5 \div 6$, observamos que en cada paso estamos dividiendo por 6 el residuo multiplicado por 10. Al realizar la primera división se obtiene un residuo de 5. Al dividir 50 por 6 se obtiene un residuo de 2. Al dividir 20 por 6 se tiene nuevamente un residuo de 2. Como lo únicos posibles residuos al dividir por 6 son $0, 1, 2, 3, 4, 5$, necesariamente el último cociente 3 debe repetirse indefinidamente obteniendo al decimal 0,833333... La razón para que esto suceda tiene que ver con el algoritmo de la división que garantiza la existencia de residuos menores que el divisor. Por otra parte, la respuesta al efectuar la operación $1 \div 2$ es $0,5$.

Las dos situaciones anteriores muestran que al dividir enteros resultan dos clases de decimales: los que tienen una expansión finita y los que tienen una expansión infinita, pero repetida o periódica.

Si miramos los números racionales como divisiones de enteros con divisor diferente de cero se afirma que existen dos clases de racionales: los que tienen un desarrollo decimal finito y los que tienen un desarrollo decimal infinito, pero periódico.

Recíprocamente todo decimal periódico es la representación de un racional. Supongamos que el referido número es:

$$N = 3,4545...$$

Multiplicamos por la potencia de 10 con exponente igual al bloque periódico, y restamos N de dicho producto.

$$100N = 345,45$$

$$100N - N = 99N = 342$$

$$N = \frac{342}{99}$$

Para aquellos cuyo período no comienza al principio, se debe hacer una modificación al proceso. Por ejemplo, si

$$N = 2,35151...$$

$$1000N = 2351,5151$$

$$10N = 23,5151$$

$$1000N - 10N = 990N = 2328$$

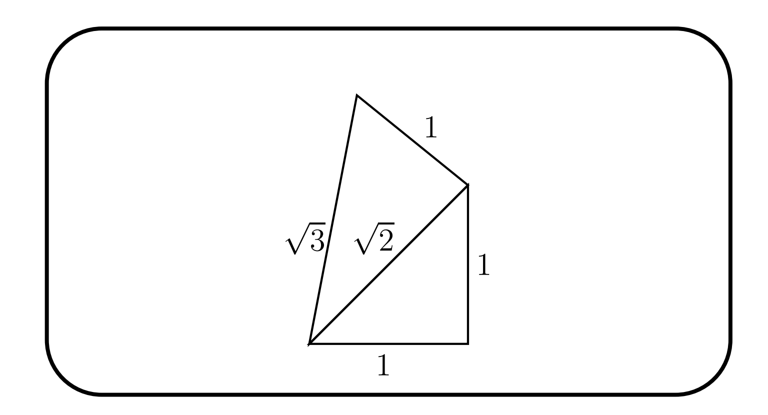
$$N = \frac{2328}{990}$$

11.4. Los números irracionales

La geometría pitagórica del siglo V estaba fundamentada en el concepto discreto de número y las proporciones. Durante la última parte del siglo se descubrió que había pares de segmentos que no eran conmensurables, por ejemplo el lado y la diagonal de un cuadrado de lado 1, que no podían ser subdivididos como múltiplos enteros de segmentos de la misma longitud y por tanto la razón de sus longitudes no era igual a la razón de dos enteros (en

términos modernos corresponde a decir que $\sqrt{2}$ no es racional). Esta situación llevó a replantear los fundamentos de la matemática, tarea que ocupó muy buena parte del siglo IV antes de Cristo. Igual sucedía con la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales a 1 y $\sqrt{2}$, conocido como $\sqrt{3}$. También el cociente de dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro, esto es, π, y muchos otros.

Estos números que no eran naturales, ni enteros ni racionales los llamaron *inconmensurables*.



Para los griegos, el descubrimiento de la inconmensurabilidad significaba que existían magnitudes geométricas que no podían ser medidas con números. La ecuación $x^2 = 2$ no tenía solución en el dominio de los números racionales griegos.

La tecnología moderna ha hecho posible conocer aproximaciones con más de cincuenta dígitos para dichos números.

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095048...$$

$$\sqrt{3} = 1,732050807568877293...$$

$$\pi = 3,14159265358979323 84...$$

$$\gamma = 0,10110111011110111110...$$

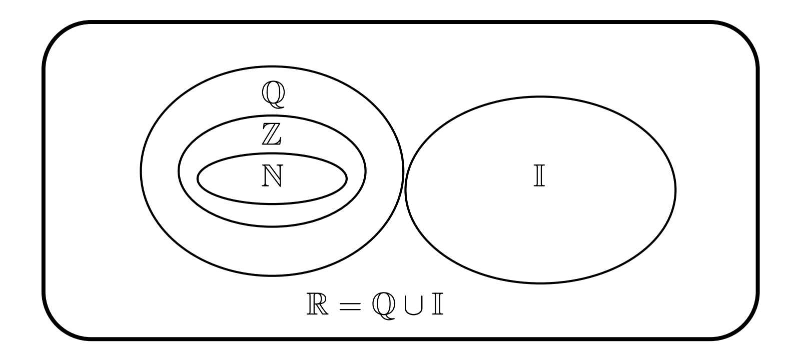
El último es un decimal construido de la siguiente forma. Su parte entera es 0 y la decimal está conformada por bloques de uno, dos, tres, cuatro, cinco (y así sucesivamente) unos separados por un cero. Dada su conformación, γ tiene un desarrollo decimal infinito, pero no periódico.

Los inconmensurables presentan un desarrollo decimal infinito no periódico y se les denomina matemáticamente con el nombre de *irracionales*, para

indicar que no representan razones o divisiones de enteros. De ellos se afirma que conforman un conjunto con infinitos elementos.

11.5. Los números reales

De manera intuitiva el conjunto de los números reales se considera formado por la unión de los racionales con los irracionales, y sus elementos se corresponden buinívocamente con los puntos de la recta; esto constituye el vínculo entre la aritmética y la geometría analítica, cuya finalidad es estudiar la geometría Euclidiana usando procesos aritméticos. El plano se concibe, desde este ángulo, como el producto cartesiano de la recta real consigo misma lo que establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y las parejas ordenadas de números reales. Mediante un diagrama se establece la relación.



Las operaciones con los reales son extensiones de las mismas con los naturales, enteros y racionales. Las relaciones de orden están definidas de manera semejante y se debe especificar cuáles son los elementos positivos y por ende los negativos. Un real es positivo si está ubicado a la derecha de 0 y es negativo si está ubicado a la izquierda. Un real positivo tiene un desarrollo decimal positivo, un real negativo tiene una expansión decimal negativa. En general, de todo número real se dice que es positivo, cero o negativo, propiedad conocida como tricotomía.

Los naturales, los enteros, los racionales y los irracionales se estudian como subconjuntos de los reales.

11.6. Redondeo de cifras decimales

Debido a que es imposible escribir un decimal infinito, solo se escribe un determinado número de cifras decimales. La parte que se escribe es una fracción y la que se omite es el error estimado. El procedimiento consiste en mirar el primer dígito omitido. Si este va de 0 a 4, el último dígito de la aproximación se mantiene, pero si se encuentra entre 5 y 9 es aumentado en la unidad.

Los dígitos escritos a la derecha de la coma en la aproximación se denominan cifras decimales significativas. El último dígito significativo puede ser perfectamente 0, por tanto no se debe completar con ceros una aproximación a menos que dicha cifra sea significativa.

Como debe recordarse, al realizar la división de dos enteros llega un momento en que las cifras del cociente se repiten, por lo que es innecesario continuar la operación una vez hallado el período; esto quiere decir, que siempre es posible saber cuál dígito corresponde en un determinado lugar de una expansión decimal periódica infinita. Este hecho permite hallar siempre el margen de error al tomar una aproximación. Como ilustración, veamos el siguiente ejercicio.

Determinar cuál cifra ocupa el lugar 45 en el desarrollo decimal de $\frac{9}{7}$.

Como el desarrollo decimal de $\frac{9}{7}$ es $1,285714285714...$ el período consta de seis cifras. Si dividimos 45 entre 6, usando el teorema del residuo, se establece que $45 = 7 \times 6 + 3$, lo que significa que la cifra que ocupa el lugar 45 es la misma que ocupa el tercer lugar, es decir 5. Hablando en términos de congruencias es lo mismo que decir que 45 es congruente con 3, módulo 6.

El anterior proceso no es aplicable cuando los decimales son usados para estimar irracionales. Sin calcular efectivamente los decimales no hay posibilidad de saber cuál dígito ocupa el lugar 23 de la expansión decimal de $\sqrt{5}$. Esto significa que no podemos calcular el error cuando se usa el redondeo correspondiente, pero es posible dar *cotas de error*.

Un método usado por los ingenieros para saber si una columna ha sido construida en forma vertical consiste en medir su altura y tomar un punto en el suelo que esté a nivel con su parte inferior y cuya distancia sea igual a la altura medida; en ese punto se clava una estaca. Posteriormente, se mide la distancia d entre el tope de la columna y la estaca. Al aplicar el teorema de Pitágoras la respuesta debe ajustarse a la fórmula $d = h \times \sqrt{2}$, donde h es la altura de la columna.

Al aplicarle el procedimiento anterior a una columna de 6 metros se encontró que la distancia d fue de $8,46$ metros. Si el ingeniero conceptuó que

la columna cumplía las especificaciones de perpendicularidad; ¿diga cuál fue la aproximación que tomó para $\sqrt{2}$?

Si dividimos $8,46$ entre 6 se obtiene $1,41$ por cociente, correspondiente a la aproximación de $\sqrt{2}$.

Al tomar 1,41 como una aproximación de $\sqrt{2}$ se ha establecido que $\sqrt{2}$ es un número que está entre $1,350$ y $1,450$.

$$1,350 \leq \sqrt{2} \leq 1,450$$

El error que se comete al usar $1,41$ como aproximación de $\sqrt{2}$ es menor en valor absoluto que $0,005$. Luego $0,005$ es una cota de error.

Una forma sencilla para hallar una aproximación de π se realizó midiendo el contorno de un plato de cocina de forma circular cuya medida fue de $75,4$ centímetros y cuyo diámetro midió 24 centímetros. Al efectuar la división $75,4 \div 24$ sorprendentemente el resultado fue de $3,141666...$

La respuesta anterior corresponde a una cota de error de $0,00005$.

Es factible construir un decimal δ de la siguiente forma. La parte entera es 7 y la decimal se forma tomando el dígito de las unidades al sumarle a 7, sucesivamente, múltiplos de 4.

Dado que:

$$7+4=11$$

$$7+8=15$$

$$7+12=19$$

$$7+16=23$$

$$7+20=27$$

El racional δ se representa mediante la igualdad $\delta = 7,15937...$

Dado que los múltipos de 4 terminan respectivamente en 4, 8, 2, 6 o 0, para comprobar que δ es racional basta con realizar las sumas:

$$7+4=11$$

$$7+8=15$$

$$7+2=9$$

$$7+6=13$$

$$7+0=7$$

Para escribir finalmente $\delta = 7,159371593715937...$

Es fácil comprobar que:

$$\delta = \frac{715930}{99999}$$

11.7. El razonamiento lógico

El análisis de las operaciones y sus propiedades es parte integral del desarrollo de la matemática, así se esté realizando un algoritmo, estudiando propiedades, planteando la solución de un problema o enunciando una definición. Los procesos matemáticos se aprenden en la medida en que se interpreten correctamente los conceptos. La habilidad para razonar es tan importante que debemos prestar especial atención a la forma de ayudar al estudiante en la adquisición de destrezas de raciocinio lógico.

Generalmente se piensa que el uso de material concreto debe limitarse a los comienzos de la enseñanza; creencia carente de validez. Dependiendo del material se pueden realizar actividades en la secundaria.

Un buen programa de matemática debe contener tres objetivos o metas.

1. Estrategias y procesos.

2. Objetivos metacognitivos.

3. Objetivos afectivos y actitudinales.

Con respecto a las estrategias es correcto afirmar que el razonamiento lógico es un proceso relevante en cualquier actividad. Los estudiantes en su labor diaria deben enfrentarse a las tareas de verificar hipótesis, predecir hechos, establecer conclusiones y efectuar clasificaciones mediante la descripción de diferencias y semejanzas. Estos hechos es posible establecerlos usando material concreto.

Las situaciones planteadas con el material ayudan a entender cómo resolver una situación dada de maneras diversas. Cualquier elemento puede poseer diferentes atributos que lo relacionan con otros.

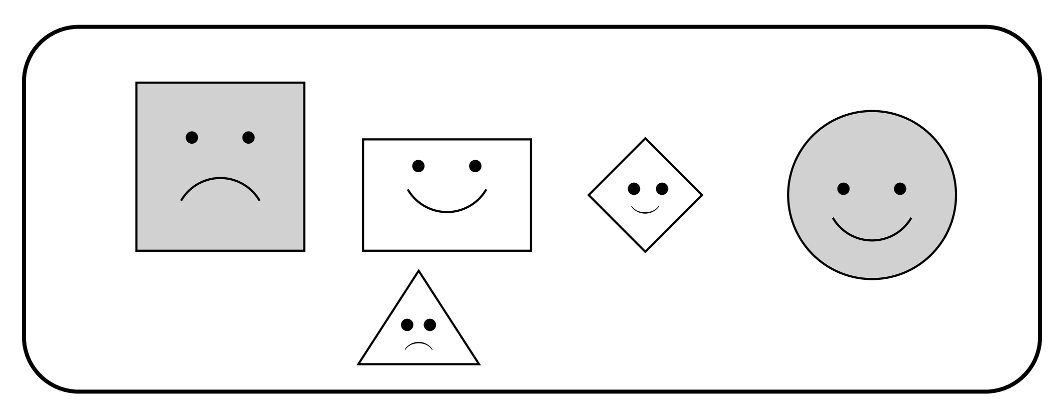
Con respecto al segundo punto, es pertinente decir que en toda tarea que se emprenda se debe tener presente en los objetivos lo que se está haciendo, cómo se está haciendo y de qué manera propicia la adquisición de conocimiento. Si se adquiere el hábito de la autoevaluación se gana en la

adquisición de destrezas de razonamiento. Se aprende de las experiencias obtenidas con los éxitos y los fracasos, cambiando las estrategias de acuerdo con las necesidades.

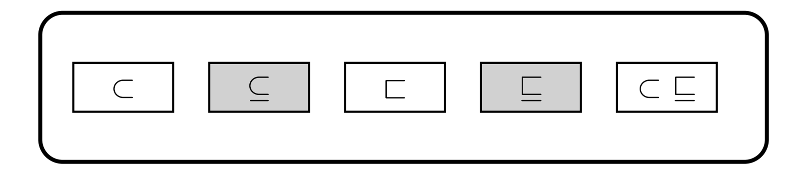
En cuanto a la parte afectiva, los objetivos tienen que ver con las actitudes y creencias. Con respecto a las actitudes se debe tener buena disposición para disfrutar y sentir placer por el trabajo. Los niveles de dificultad deben ser ajustados para evitar la frustración por el fracaso. Si son equilibrados, el aprendiz disfrutará de sus tareas.

En lo relacionado con las creencias, se desarrolla autoestima o fe en las habilidades personales si se tiene la convicción en la eficacia de los métodos.

Además del descrito con anterioridad, existe la posibilidad de construir diversidad de material de apoyo basado en la imaginación del maestro, como figuras plastificadas de cartón u otro material. El siguiente es un juego que consta de sesenta piezas de tres colores con formas de círculos, cuadrados, rectángulos, triángulos y rombos. Dos tamaños grande y pequeño. Dos expresiones, caritas felices y caritas tristes distribuidas así: doce elementos de cada figura, veinte elementos de cada color, treinta de cada tamaño, treinta caritas sonrientes y treinta tristes.



Otro conjunto de fácil construcción consiste en rectángulos de dos colores, marcados con los signos de contenencia representados con dos tipos de trazos, curvos y rectos; con signo igual y sin signo igual; dobles y sencillos.



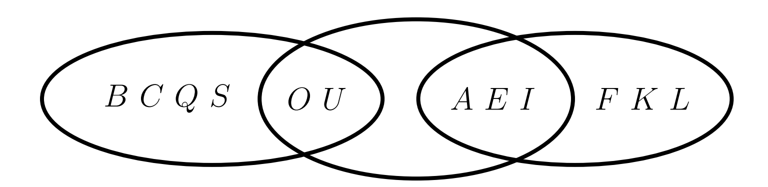
Se debe tener cuidado de eliminar de los dobles aquellos que se repiten, ya que por ejemplo, "$\sqsubset \subseteq$" y "$\subseteq \sqsubset$" representan la misma situación. Se tiene un total de veintiocho elementos distribuidos así: ocho sencillos y veinte dobles. Dieciocho con signo igual y diez sin signo igual; catorce del primer color y catorce del segundo.

Otro conjunto se conforma con las letras mayúsculas, mediante la clasificación: las que se escriben con trazos rectos como "A, E, F, H, I, Z" y las que se escriben con trazos curvos como "B, C, G, Q, R, S". También se dividen en vocales y consonantes.

11.7.1. Las actividades

Las actividades deben ser orientadas por el maestro en un ambiente cordial, sin misterios ni penalizaciones y no se les considerará como tareas para calificar, pero propiciando la atención individual y la discusión ordenada. En los primeros grados de escolaridad se deben ubicar en círculos, de manera que el material esté a la vista de todos; posteriormente podrán trabajar en grupos.

De acuerdo con la propiedad a estudiar, los elementos se colocarán dentro de círculos ya sea dibujados con tiza o hechos con cuerdas o cintas. Las propiedades se enuncian mediante oraciones como "ser rojo", "no ser un triángulo", "ser una carita feliz circular pequeña". Los conectores *y*, *o*, *no* se usan para combinar las diferentes propiedades, el primero de los cuales sirve para designar los elementos que tengan las dos propiedades enunciadas simultáneamente y se ubicarán en la intersección de los círculos correspondientes.



El gráfico anterior relaciona las propiedades *ser una letra con trazos curvos*, *ser una vocal* y *ser una letra con trazos rectos.*

A medida que se va avanzando se deben proponer problemas que impliquen realizar inferencias; por ejemplo tome dos círculos y escriba una propiedad por cada uno, sin darla a conocer; comience a ubicar elementos en cada círculo, pidiendo a los estudiantes que descubran la propiedad respectiva y

la escriban en el cuaderno. No dé a conocer las propiedades hasta cuando la mayoría las haya descubierto.

El juego de Plaza Sésamo *Una de estas cosas es diferente* es muy apropiado para realizar inferencias. Escoja cuatro objetos, tres de los cuales tengan una propiedad que no tenga la cuarta, para que los estudiantes la descubran y den las razones del caso.

Una variante consiste en escoger un elemento y pedir a un estudiante que ubique uno con exactamente una diferencia; y así sucesivamente, cada alumno debe colocar a continuación un elemento diferente, usando el mayor número posible, para formar una sucesión donde cada elemento sea diferente a su predecesor.

Otra forma consiste en dibujar un círculo dividido entre seis y diez partes. Ubique la primera y después los estudiantes deben colocar, de izquierda a derecha, o lo contrario, un elemento que tenga una única diferencia con su antecesor. Colocar el último elemento puede ser difícil y a veces imposible.

A partir del cuarto grado y hasta los primeros años de la secundaria se establecen ordenamientos siguiendo un patrón, para elaborar sucesiones con la finalidad es prepararlos para establecer generalizaciones o hallar relaciones algebraicas entre sus elementos, fundamento para elaborar el concepto de función.

11.7.2. Patrones numéricos

El material didáctico permite experimentar por ensayo y error. Mediante su uso es posible validar hipótesis sin recurrir a la ayuda del maestro o el texto. Sin embargo, la finalidad es que a través de la experiencia acumulada se afine el raciocinio matemático, encontrando las relaciones posibles al analizar una situación particular.

La sucesión $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ se construyó usando los números pares. Por otra parte,

$\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ es la secuencia de los cuadrados.

$\{3, 5, 7, 9, \dots\}$ consiste en multiplicar por 2 y agregar la unidad.

Veamos las igualdades:

$$1 + 2 = 3 = \frac{2 \times 3}{2}$$

$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \times 4}{2}$$

$$\vdots$$

Estas igualdades deben permitir calcular la suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 20$$

realizando la operación:

$$\frac{20 \times 21}{2} = 210$$

Por su parte, las igualdades:

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Deben llevar a concluir que la suma de los impares consecutivos, a partir de 1, siempre es un cuadrado.

De igual manera, si los impares consecutivos se escriben en un arreglo triangular como el siguiente:

$$1$$

$$3 \quad 5$$

$$7 \quad 9 \quad 11$$

$$13 \quad 15 \quad 17 \quad 19$$

$$\vdots$$

Calculando la suma de cada una de las filas se podrá inferir que el resultado es la sucesión $1, 8, 27, 64, \ldots$, esto es, el cubo de cada uno de los números $1, 2, 3, 4, \ldots$

Con los números 34, 21 y 13 se establecen las relaciones:

$$34 = 21 + 13 = 13 + 21$$

De estas se derivan, además, las igualdades:

$$2 \times 17 = 21 + 13 = 13 + 21$$

$$17 \times 2 = 21 + 13 = 13 + 21$$

Cada una de las igualdades posibles representa la solución de un problema. Por ejemplo:

$$2 \times 17 = 13 + 21$$

Conduce, entre otros, al enunciado del problema: El doble de la edad de Alejandro disminuida en 13 es igual a 21 años. Si en nuestro país la ciudadanía se adquiere a los 18 años, decir si Alejandro es o no ciudadano.

Debido a que todo problema es susceptible de redactarlo en términos de encontrar relaciones entre números, el anterior es equivalente a: Si el doble de un cierto número disminuido en 13 es igual a 21, hallar dicho número.

Tome los números 9, 16, 25 y 12. Con las tres primeras cantidades se establecen las relaciones: $9, 16, 25$, que son respectivamente los cuadrados de $3, 4, 5$. Además, $25 = 2 \times (3 \times 4) + 1 = 24 + 1$.

La relación más fuerte se describe mediante la igualdad:

$$9 + 16 = 25$$

Esta igualdad establece que 3 es una solución de la ecuación:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 25$$

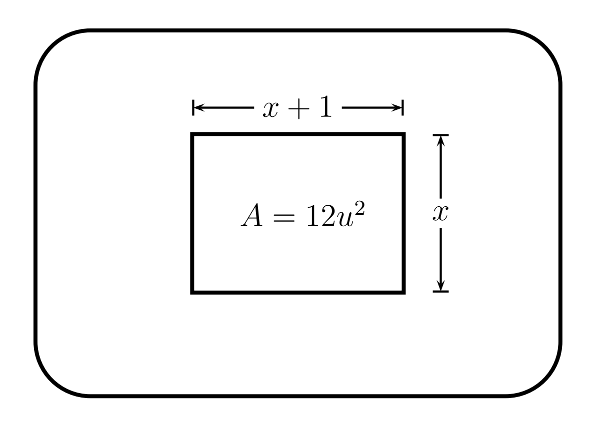
Efectuando las operaciones pertinentes y trasponiendo términos se llega a:

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$

Dividiendo por 2 se deriva:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

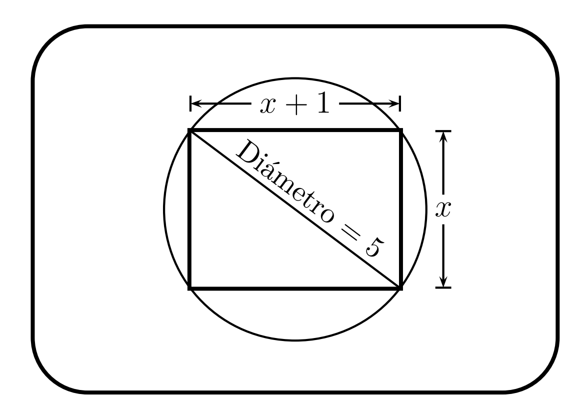
La última ecuación, desde el punto de vista de la geometría, consiste en: Determinar el valor de la altura del rectángulo de lados x, $(x + 1)$, si la medida de su área es 12 unidades cuadradas.



La igualdad $9+16=25$, interpretada de acuerdo con el teorema de Pitágoras, indica que 5 es el valor de la diagonal de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 unidades, respectivamente, situación que nos da vía para interpretar la ecuación:

$$x^2+x-12=0$$

mediante otra situación geométrica equivalente: Determinar la longitud de los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de diámetro 5 unidades, si la diferencia entre sus lados es igual a 1.



Otra versión consiste en el enunciado: Determinar el precio de dos refrescos americanos, si la diferencia entre ellos es de 1 dólar y el producto de dichos valores es igual a 12.

La ecuación $x^2+x-12=0$ finalmente debe conducirnos al análisis de la proposición: Hallar dos enteros consecutivos cuyo producto sea igual a 12. Al menos cuatro interpretaciones diferentes para el mismo problema.

Tome las sucesiones $3, 4, 16, 9$ y $4, 12, 16$. Con la primera se establece la igualdad:

$$3+4=16-9$$

De esta relación se deduce que 16 es solución de la ecuación

$$3+\sqrt{x}=x-9$$

De la segunda secuencia se deriva la igualdad:

$$4=16-12$$

Relación que lleva a afirmar que 16 es solución de la ecuación

$$\sqrt{x}=x-12$$

Partiendo de la ecuación:

$$3 + \sqrt{x} = x - 9$$

Sumando 3 a ambos miembros se llega a:

$$\sqrt{x} = x - 12$$

Situación que indica que dichas ecuaciones son equivalentes.

Para resolver la última ecuación, procedemos a elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad para obtener:

$$x = x^2 - 24x + 144$$

Trasponiendo términos e igualando a cero se obtiene:

$$x^2 - 25x + 144 = 0$$

Factorizando se llega a:

$$(x - 16)(x - 9) = 0$$

De donde se concluye que tanto 16 como 9 son soluciones de:

$$x^2 - 25x + 144 = 0$$

Reemplazando en la ecuación original, tenemos:

$$3 + \sqrt{x} = x - 9$$

Vemos que 9 no es solución de dicha ecuación. Es lo que ordinariamente se denomina una *raíz extraña*, producto de haber elevado al cuadrado.

Volvamos a la ecuación original:

$$3 + \sqrt{x} = x - 9$$

Aplicando la propiedad conmutativa al primer miembro y multiplicando ambos lados por $(\sqrt{x} - 3)$ se llega a:

$$(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3) = (x - 9)(\sqrt{x} - 3)$$

Efectuando el producto se tiene:

$$(x - 9) = (x - 9)(\sqrt{x} - 3)$$

Suponiendo que x es diferente de 9, se puede aplicar la propiedad cancelativa para llegar a la ecuación:

$$1 = \sqrt{x} - 3$$

De donde se obtiene:

$$\sqrt{x} = 4$$

Cuya única solución es $x = 16$.

Con este ejemplo se desea mostrar cómo las dos primeras ecuaciones estudiadas son equivalentes, mientras que la de segundo grado, consecuencia de elevar al cuadrado, no lo es. La finalidad del ejercicio es hacer notar la posibilidad de encontrar soluciones más acertadas a través de un mejor estudio del problema planteado. Para esta situación particular, elevar al cuadrado no es la solución más razonable.

Con las tripletas $(360, 240, 600)$ y $(360, 240, 120)$ se establecen las relaciones:

$$360 + 240 = 600$$

$$360 - 240 = 120$$

Estas igualdades nos llevan a plantear que 360 y 240 son soluciones del sistema:

$$x + y - 600 = 0$$

$$x - y - 120 = 0$$

A partir de este sistema se puede plantear el ejercicio que sigue.

Si la suma de las áreas de dos lotes de terreno es 600 metros cuadrados y su diferencia es 120, hallar el perímetro de cada uno sabiendo que ambos miden 12 metros de ancho.

Si está pensando que la única solución consiste en resolver el sistema de ecuaciones por suma y resta, dividir por 12 el valor de cada una de las incógnitas para encontrar el largo de los respectivos lotes y proceder a encontrar los perímetros, veamos el siguiente argumento.

Puesto que cada uno de los lotes mide 12 metros de ancho se divide por 12 ambas ecuaciones, para obtener el sistema equivalente:

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 50$$

$$\frac{x}{12} - \frac{y}{12} = 10$$

Donde las expresiones $\frac{x}{12}$, $\frac{y}{12}$ representan el largo de cada uno de los lotes.

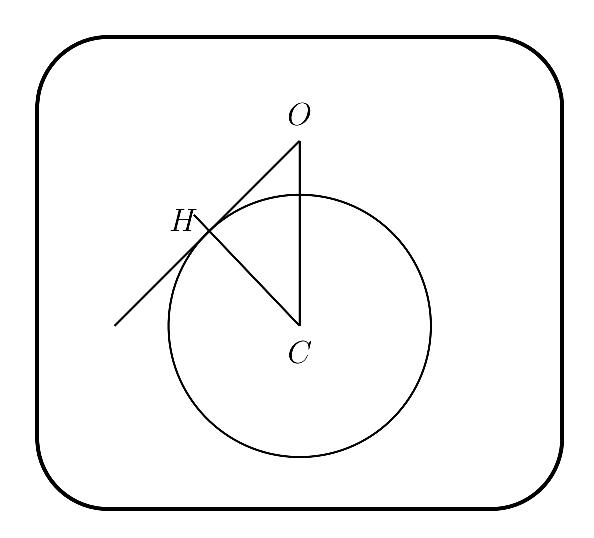
Resolviendo por suma y resta se concluye que $\frac{2x}{12} = 60$, y por consiguiente $\frac{x}{12} = 30$. Se concluye que el primer lote mide 30 metros de largo. De igual forma se deduce que $\frac{y}{12} = 20$, para decir que el segundo lote mide 20 metros de largo.

Finalmente, se deduce que el primer perímetro es $2(12+30) = 84$ metros, mientras que el segundo es $2(12+20) = 64$ metros.

A este problema se le puede adicionar la siguiente información: ¿Cuánto dinero se debe invertir para colocar una cerca de tres hileras de alambre de púas alrededor de dichos lotes, si cada metro de alambre cuesta 50 pesos?

Mediante un modelo se puede explicar por qué cuando se contempla el mar sentado en la playa, si se levanta de repente se ve el horizonte alejarse rápidamente.

Si consideramos un círculo imaginario, como si fuera un corte transversal de la Tierra, el observador estará situado sobre la línea perpendicular que pasa por el centro y el horizonte estará determinado por la visual que parte de los ojos del observador y es tangente a la Tierra.



El triángulo △OCH es rectángulo, por tanto:

$$CH^2 + HO^2 = OC^2$$

Despejando y obteniendo raíz cuadrada:

$$HO = \sqrt{OC^2 - CH^2}$$

Suponiendo que la altura del observador es h y que el radio de la Tierra es r:

$$OC = r + h$$

De esta igualdad se deduce que:

$$HO = \sqrt{(r+h)^2 - r^2}$$

Realizando operaciones se llega a:

$$HO = \sqrt{h(2r+h)}$$

Como el radio de la Tierra es constante, el horizonte varía de acuerdo con la altura del observador. Supongamos que el radio de la Tierra es de 6750 kilómetros. Si los ojos del observador se encuentran a 0,5 metros del suelo el horizonte estará ubicado a 2,6 kilómetros de distancia. Si están a 2 metros, el horizonte se encontrará a más de 5 kilómetros.

Para autoevaluar su nivel de razonamiento.

1. A partir de los números 144, 12, 36 y 180 describa las relaciones que lo lleven a la ecuación $x^2 + 3x - 180 = 0$ y redacte al menos tres versiones equivalentes de problemas cuyo planteamiento se reduzca al análisis de la mencionada ecuación.

2. Usando la ecuación $3x - 3 = 0$ y la relación entre 5 y 625 derive la ecuación:
$$5^{3x+1} = 625$$

3. Escoja de dos a cuatro cantidades, encuentre patrones numéricos que los relacionen y redacte situaciones problémicas que se resuelvan por métodos aritméticos.

4. Escoja de dos a cuatro cantidades, encuentre patrones numéricos que los relacionen y redacte situaciones problémicas que se resuelvan por métodos del álgebra, la trigonometría o el cálculo diferencial.

11.7.3. Modelos para la formulación de problemas

Se ha insistido en la importancia de la formulación de problemas, para propiciar la construcción del conocimiento matemático siguiendo los lineamientos descritos por Pólya.

Partiendo de encontrar relaciones sencillas entre cantidades se pueden plantear situaciones problémicas específicas. Para el efecto, el maestro deberá elaborar guías apropiadas con instrucciones precisas, redactadas de tal manera que no ofrezcan dificultad ni conduzcan a interpretaciones equívocas. De acuerdo con el criterio magisterial y la disponibilidad tecnológica de la institución educativa, estas se pueden confeccionar con diapositivas, para trabajar con el computador, impresas o en caso extremo consignadas en el tablero.

Antes de comenzar el trabajo se debe preparar al estudiante tanto sicológica como prácticamente, con el propósito de enseñarle a seguir instrucciones, ya que al principio tendrá que vencer la resistencia estudiantil, por la falta de entrenamiento y por la costumbre de esperar que sea el instructor quien aborde y explique los procesos matemáticos con la poca participación estudiantil. Con esta metodología se pueden considerar desde los problemas más sencillos hasta aquellos de dificultad considerable, con poco desgaste por parte del profesor.

A continuación se proponen algunos modelos, los cuales no son camisa de fuerza porque se parte del criterio que es el maestro, de acuerdo con las condiciones de su institución educativa, el artífice de su propio éxito teniendo en cuenta su compromiso con la sociedad a la que sirve.

Modelo número uno

Institución educativa:____________________________
Asignatura:_______________ Curso:_______________
Profesor:_______________________________________

TEMA: **Las operaciones de suma y resta, multiplicación y division de naturales.**

INDICADORES DE VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE

1. Entiende las características de las operaciones de suma y resta, multiplicación y división.

2. Selecciona estrategias apropiadas para la solución de problemas.

3. Expone adecuadamente sus argumentos.

4. Analiza las soluciones desde diferentes perspectivas.

Situación problémica: Establecer la igualdad:

$$100 = 6 \times 13 + 22$$

INSTRUCCIONES

Para establecer la igualdad anterior, a continuación encontrará una serie de instrucciones las cuales debe ejecutar de acuerdo con el orden en que aparecen.

1. Calcule la diferencia entre 100 y 22.
2. Descomponga a 100 en una suma de dos sumandos, donde el primero sea 22.
3. Aplique al paso dos la propiedad conmutativa de la suma.
4. Decida cuál de las tres cantidades es divisible por 6 y realice la división.
5. Exprese el dividendo anterior como el producto de 6 por el cociente encontrado.
6. Regrese al paso tres y realice los reemplazos del caso.
7. Redacte un problema en términos numéricos cuya solución implique la igualdad anterior.
8. Dé solución al problema planteado.
9. Redacte problemas equivalentes al planteado inicialmente.

La heurística o proceso que se espera que desarrollen los estudiantes, con la orientación del educador, debe ser la siguiente:

$$100 - 22 = 78$$

$$100 = 22 + 78$$

$$100 = 78 + 22$$

El propósito de la segunda instrucción es la aplicación correcta de la definición de diferencia, mientras que el de la tercera, es adecuar la igualdad a la condición de la situación planteada.

La cantidad divisible por 6 es 78, por lo tanto:

$$78 \div 6 = 13$$

Luego:

$$78 = 6 \times 13$$

Finalmente:

$$100 = 6 \times 13 + 22$$

El problema cuya solución implica la igualdad propuesta es:

Hallar un número natural que al multiplicarlo por 6 y agregarle 22 sea igual a 100.

La solución al problema consiste en devolver los pasos aplicados en las instrucciones anteriores, esto es: a 100 restarle 22 para obtener 78 y dividir 78 entre 6. Indudablemente la respuesta debe ser 13.

Problemas equivalentes:

Seis veces la edad de Andrea más 22 años suman un siglo. ¿Cuál es la edad de la niña?

En un conjunto cuyo cardinal es 100, después de eliminar 22 elementos, se desea conformar 6 subconjuntos disyuntos equinumerosos. ¿Cuántos elementos debe poseer cada uno de ellos?

Dividiendo por 10 la relación original se obtiene la igualdad:

$$10 = 6 \times 1{,}3 + 2{,}2$$

Esta nueva relación permite redactar el siguiente problema:

Alejandro compró 6 máquinas de afeitar. Si pagó con un billete de 10 dólares y le devolvieron 2,2, ¿cuánto costó cada máquina?

A este último problema, si le agregamos algunas consideraciones podemos obtener una versión más amplia:

Alejandro compró seis máquinas de afeitar, pagó con un billete de 10 dólares y le devolvieron 2 dólares con 20 centavos. Si el impuesto al valor agregado corresponde al diez por ciento de la compra, ¿cuál fue el costo real de cada máquina?

Modelo número dos

Institución educativa:________________________
Asignatura:____________ Curso:____________
Profesor:________________________________

TEMA: **Ecuaciones de primer grado con una incógnita**

INDICADORES DE VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE

1. Identifica las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

2. Establece estrategias para la solución de ecuaciones.

3. Confecciona modelos matemáticos para ilustrar las soluciones.

Situación problémica cuyo estudio lleva a la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Establecer la ecuación,

$$2X + 3(X + 2) = 66$$

Definición: Se dice que un entero es una combinación lineal de otros dos si el primero se puede expresar como la suma de múltiplos de estos dos últimos.

Ejemplo: 41 es una combinación lineal de 5 y 3 porque:

$$4 \times (5) + 7 \times (3) = 41$$

INSTRUCCIONES

Para establecer la ecuación $2X+3(X+2) = 66$, a continuación encontrará una serie de instrucciones, las cuales deberá ejecutar de acuerdo con el orden en que aparecen.

1. A partir de los números 24 y 42, teniendo en cuenta que $24 + 42 = 66$, $24 = 2 \times 12$ y $42 = 3 \times 14$, escriba a 66 como una combinación lineal de 12 y 14.

2. Reemplazando a 12 por X, a 14 por Y, exprese a 66 como una combinación lineal de X con Y.

3. Usando la igualdad $14 = 12 + 2$, encuentre una ecuación que relacione a X con Y.

4. Vuelva al paso (2) y reemplace el valor de Y encontrado en (3), para derivar la ecuación $2X + 3(X + 2) = 66$.

5. Redacte un problema en términos numéricos, cuya solución lleve a plantear la ecuación formulada anteriormente.

6. Resuelva el problema.

7. Redacte problemas equivalentes al planteado en (5).

La heurística consta de los siguientes pasos:

$$2 \times 12 + 3 \times 14 = 66$$

Al reemplazar a 12 por X y a 14 por Y se tiene:

$$2X + 3Y = 66$$

Efectuando los reemplazos se obtiene:

$$Y = X + 2$$

Reemplazando el valor de Y se llega a:

$$2X + 3(X + 2) = 66$$

El problema cuya solución lleva a plantear la ecuación propuesta es:

La diferencia entre dos números es de dos unidades y el doble del menor sumado con el triple del mayor es igual a 66. Hallar dichos números.

La solución se desarrolla de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 2X + 3(X + 2) &= 66 \\ 2X + 3X + 6 &= 66 \\ 2X + 3X &= 66 - 6 \\ 5X &= 60 \\ X &= 12 \end{aligned}$$

De acuerdo con las condiciones del problema, el número menor es 12 y el mayor es 14.

Tres problemas equivalentes son los siguientes:

1. Un pantalón cuesta dos dólares más que una camisa y dos camisas y tres pantalones importan 66 dólares. ¿Cuánto cuesta cada una de dichas prendas?

2. Luis es 2 años mayor que Alfredo y el doble de la edad de Alfredo sumado con el triple de la de Luis son 66 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

3. Determinar el cardinal de cada uno de los conjuntos A y B si el cardinal de B es dos unidades mayor que el de A y el doble del de A más el triple del de B es igual a 66.

De acuerdo con la definición planteada por Larousse, que alude al esquema del proceso de investigación científica, una vez planteado el problema veamos cómo implicitamente se encuentra la solución en el mismo.

Consideremos el segundo problema para mostrar una forma alterna de presentación a la luz de lo dicho en el párrafo anterior y lo expresado por Pólya.

Luis es 2 años mayor que Alfredo y el doble de la edad de Alfredo sumado con el triple de la de Luis son 66 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

La metodología se inicia estipulando la población referencial, o Universo, para proceder a recolectar los datos, procesarlos y tabularlos. Con base en este proceso se escribe el informe o solución.

Primer paso. Universo: Combinaciones lineales.

$$ax + by = d$$

Muestra: Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

$$ax + b(x + c) = d$$

Segundo paso. Recolección de datos:

Edad de Alfredo: X.

Edad de Luis: $X + 2$.

Doble de la edad de Alfredo: $2X$.

Triple de la edad de Luis: $3(X + 2)$.

De acuerdo con las condiciones del problema:

$$2X + 3(X + 2) = 66$$

Muestra: 66 es una combinación lineal de X con $X + 2$.

Tercer paso. Procesamiento de datos, esto es, tabulación o codificación:

$$\begin{aligned}
2X + 3(X + 2) &= 66 \\
2X + 3X + 6 &= 66 \\
2X + 3X &= 66 - 6 \\
5X &= 60 \\
X &= \frac{60}{5} \\
X &= 12
\end{aligned}$$

Cuarto paso. Informe:

Partiendo de la ecuación planteada se sustituye el valor de la solución encontrada:

$$\begin{aligned}
2 \times 12 + 3(12 + 2) &= 2 \times 12 + 3 \times 14 \\
&= 24 + 42 \\
&= 66
\end{aligned}$$

Modelo número tres

Institución educativa:______________________________
Asignatura:________________ Curso:________________
Profesor:____

TEMA: **Operaciones con fracciones y decimales**

INDICADORES DE VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE

1. Identifica las relaciones entre las fracciones y los decimales.
2. Usa apropiadamente los diferentes modelos de fracciones.

3. Identifica las fracciones equivalentes.

4. Aplica las fracciones y los decimales para solucionar problemas.

Situación problémica: Establecer la igualdad:

$$6 = 3(\frac{7}{4}) + \frac{3}{4}.$$

INSTRUCCIONES

1. Use la relación $6 = \frac{24}{4}$ para establecer la igualdad propuesta.

2. A continuación se enuncian tres problemas; solucione cada uno de ellos.

3. Explique por qué el tercero no tiene solución.

4. Determine por qué no son equivalentes.

5. ¿Cuál es el mínimo número de elementos que debe tener el conjunto A para que el problema tenga solución?

6. Con relación al tercer problema redacte una versión cuya solución sea razonable.

1) Hallar una fracción tal que al mutiplicarla por 3 y agregarle $\frac{3}{4}$ sea igual a 6 unidades.

2) Glenna posee un bono por 6 dólares del supermercado Mart, que puede usar para cancelar artículos. Pagó tres barras de chocolate y todavía le quedan $\frac{3}{4}$ del bono. ¿Cuánto costó cada barra de chocolate?

3) Dado un conjunto A cuyo cardinal es 6, después de eliminar las tres cuartas partes de sus elementos, se desea encontrar tres subconjuntos disyuntos equinumerosos con los elementos restantes. ¿Cuántos elementos debe tener cada uno de ellos?

La solución al primer problema se reduce a efectuar la diferencia:

$$\frac{24}{4} - \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 3(\frac{7}{4})$$

Al dividir por 3 la última fracción se llega a la respuesta $\frac{7}{4}$.

Con relación al segundo problema, si se tiene presente que un cuarto de dólar corresponde a 25 centavos de dicha unidad monetaria, los 6 equivalen

a 24 monedas de 25. Por su parte Glenna gastó solamente una cuarta parte del bono, cantidad que en monedas corresponde a la cuarta parte de 24, esto es, 6 monedas de 25, suma equivalente a un dólar con cincuenta centavos. Si esta última cantidad la dividimos por 3 la respuesta es 50 centavos, o en términos de fracciones, cada barra de chocolate cuesta $\frac{1}{2}$ dólar. Volviendo a la solución, se deduce que medio dólar son dos monedas de 25, o sea $\frac{1}{12}$ del valor del bono. Por lo tanto, las tres barras costaron $\frac{3}{12}$, o definitivamente $\frac{1}{4}$ del valor del bono.

En tercera instancia, como el cardinal del conjunto A es 6 y este número no es divisible por 4, $\frac{1}{4}$ de 6 no es un entero, situación que induce a afirmar que el problema no tiene solución.

Indudablemente, por presentar respuestas diferentes los tres problemas no son equivalentes.

Por otra parte, $\frac{1}{4}$ de 6 es $\frac{3}{2}$ y en estas condiciones para que el problema tenga solución se debe considerar la posibilidad de dividir cada elemento en dos mitades, pero esta operación no está definida para los elementos de un conjunto. Se debe aclarar que desde el punto de vista de la teoría, definitivamente un conjunto conformado con 6 manzanas es diferente al conformado con 12 mitades de estas frutas. Si fueran iguales se tendría que, en términos de las clases de equivalencia, $[1] = [\frac{1}{2}]$.

El anterior criterio lleva a afirmar que el menor número de elementos que debe poseer el conjunto A para que el problema tenga solución es 12.

Una versión razonable del problema tres es la que sigue:

Valery tenía 6 pasteles de manzana para compartir con sus primos. Después de servir porciones iguales le quedó una cuarta parte por repartir. ¿A cuántas personas le ofreció y qué porción sirvió a cada una?

Note que esta versión es viable porque los pasteles perfectamente se pueden dividir por mitades.

Es pertinente destacar que este último problema es equivalente con el segundo de los planteados porque la solución para ambos se reduce a $\frac{1}{2}$.

11.7.4. El pensamiento geométrico

El sentido espacial se desarrolla mientras el estudiante avanza en escolaridad, para lo cual la escuela debe prepararlo propiciando experiencias geométricas que le ayuden a afinar el razonamiento. Desafortunadamente la geometría es una invitada de segunda clase en el currículo, al desestimar con mucha

frecuencia su relación con el desarrollo de tópicos de importancia, como las fracciones, para citar un solo ejemplo.

Finalizamos el capítulo con una breve descripción del trabajo de los educadores holandeses Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof (1957) que consiste en una escala con cinco niveles jerárquicos que describen la complejidad del pensamiento geométrico: cómo se piensa, qué tipo de ideas se poseen y cómo se depuran a medida que se avanza de un nivel al superior.

En el nivel cero, o de *Visualización* los objetos del pensamiento son las formas de las figuras. Estas se reconocen y nombran de acuerdo con la idea que se adquiera a través de la vista. En este nivel se tiene la capacidad de medir y mencionar propiedades basándose en la apariencia. Un cuadrado lo es porque luce como tal, de manera que si se rota un ángulo de 45^o grados con respecto al eje vertical deja de serlo. En este nivel se realizan clasificaciones de acuerdo con la apariencia. Si se indaga acerca de las razones de una ordenación la respuesta perfectamente puede ser: porque todas se parecen.

En el nivel uno, o de *Análisis*, los objetos del pensamiento son clases de formas en lugar de formas individuales. Ahora un rectángulo lo es porque tiene cuatro lados, los opuestos son paralelos y con igual longitud, sus cuatro ángulos son rectos y las diagonales son congruentes. Las figuras las caracterizan por las propiedades que poseen, pero no son capaces de establecer relaciones entre ellas. Por ejemplo no poseen la habilidad de inferir que todo cuadrado es un rectángulo, pero no lo contrario.

En este nivel, los estudiantes comienzan a apreciar que la razón para ubicar un elemento particular en una colección de figuras tiene que ver con la propiedad que las caracteriza. En esta etapa, en lugar de mencionar las propiedades de un triángulo en particular, hacen referencia a las propiedades de los triángulos en general. Una figura pertenece a una clase si posee las características distintivas de dicha colección.

En el nivel dos, o *Deductivo informal*, los objetos del pensamiento son las propiedades de las figuras. En esta etapa se describen relaciones entre las diferentes figuras. Si los cuatro ángulos de un paralelogramo son rectos, este es un rectángulo o un cuadrado, pero en el último caso los cuatro lados deben ser congruentes.

Usando las oraciones del tipo si, entonces clasifican con un mínimo de propiedades. Cuatro lados congruentes y al menos un ángulo recto son suficientes para definir un cuadrado pero las demostraciones son más bien intuitivas antes que lógicamente deductivas.

En el nivel tres, o *Deductivo*, los objetos del pensamiento son relaciones

entre las propiedades geométricas. En este nivel se es capaz de considerar sistemas consistentes en axiomas, definiciones, teoremas como parte esencial del estudio de la geometría. Se consideran propiedades abstractas y realizan conclusiones basadas en la teoría y el raciocinio lógico matemático y no en la intuición. Si bien se sabe que las diagonales de un rectángulo se bisectan, es necesario demostrarlo con argumentos matemáticos.

En el nivel cuatro, o *Riguroso*, los objetos del pensamiento consisten en considerar la geometría como un sistema axiomático deductivo. El razonamiento se centra en los sistemas deductivos de cualquier naturaleza. En esta última etapa se estudian los diferentes sistemas axiomáticos de la geometría. Si se niega el quinto postulado de Euclides se obtienen conclusiones diferentes conducentes al estudio de las geometrías no euclidianas.

Cuatro características del trabajo de los van Hiele merecen especial atención.

1. Los niveles son secuenciales. Para pasar al uno es necesario haber superado el cero, y así sucesivamente, lo cual indica desarrollar las capacidades de raciocinio requeridas en cada etapa.

2. No dependen de la edad, como las etapas de desarrollo de Piaget. Esto significa que algunos adultos perfectamente pueden no haber superado el nivel cero. Un significante número de ellos no pasan del dos.

3. La experiencia geométrica es un factor preponderante en el avance a través de cada nivel, por eso la importancia de incluir actividades que le permitan al estudiante explorar, descubrir, relacionar, discernir, argumentar.

4. Ajustar el nivel de desarrollo lingüístico. Cuando este es inferior no hay un real aprendizaje. Un estudiante, por ejemplo, puede memorizar que todos los cuadrados son rectángulos sin haber construido la relación e igualmente realizar de memoria una demostración sin entender la secuencia lógica de esta ni las relaciones involucradas.

11.7.5. Actividades geométricas

En el nivel cero las actividades deben incluir identificación, clasificación y manipulación de figuras en dos y tres dimensiones (dibujadas en cartulinas o recortadas en cartón industrial), incluyendo ejemplos diversos de formas,

tamaños y posiciones, con el fin de mostrar la irrelevancia de ciertas situaciones. Algunos estudiantes piensan que al colocar un cuadrado apoyado en una de sus aristas deja de serlo. Clasificar figuras usando modelos es una forma apropiada para introducir las ideas geométricas. Los nombres y propiedades de las figuras se van asimilando cuando los niños comienzan a reconocerlas y describirlas con sus propias palabras.

Debe hacerse énfasis en el estudio de las formas, mediante exploraciones visuales y táctiles. En el nivel cero las actividades no deben considerarse como exclusivas de los primeros grados; recuerde que no todos los alumnos han tenido la oportunidad de experimentar y desarrollar ideas más allá de este primer nivel.

Provéase de una colección de figuras conformadas por trazos rectos o curvos, y de estas últimas, cóncavas o convexas de diferentes tamaños, con el fin de encontrar diferencias y parecidos. Por ejemplo, toda suerte de rectángulos, triángulos, pentágonos, hexágonos, tanto regulares como no regulares, círculos, sectores circulares, y todas aquellas que su imaginación le permita.

Seleccione, por ejemplo, un cuadrado como patrón. A continuación, ordene a cinco estudiantes tomar por turnos: un pentágono regular(1), un rectángulo(2), un triángulo equilátero(3), un cuadrado más pequeño(4), un triángulo rectángulo isósceles(5) para establecer las siguientes clasificaciones de semejanzas con respecto al patrón.

Son semejantes: 1, 3 y 4 porque sus lados son congruentes.

Son semejantes: 2 y 4 porque tienen cuatro ángulos rectos.

Es semejante: 4 porque ambos son cuadrados.

No son semejantes: 1, 3 y 5 porque difieren en el número de lados.

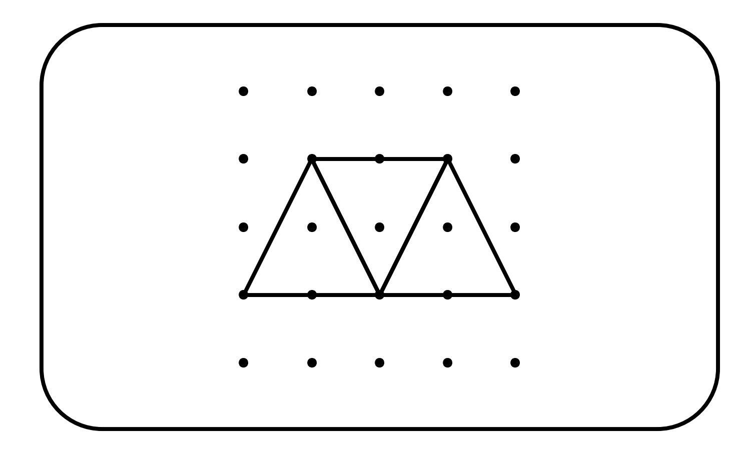
No es semejante: 2 porque sus lados no son congruentes.

El geoplano, inventado por el matemático italiano Caleb Gattegno, es un recurso didáctico para la introducción de gran parte de los conceptos geométricos; porque su carácter manipulativo permite a los niños comprender mejor una serie de términos abstractos que muchas veces generan ideas erróneas en torno a ellos. El geoplano se utiliza para construir toda clase de figuras rectas.

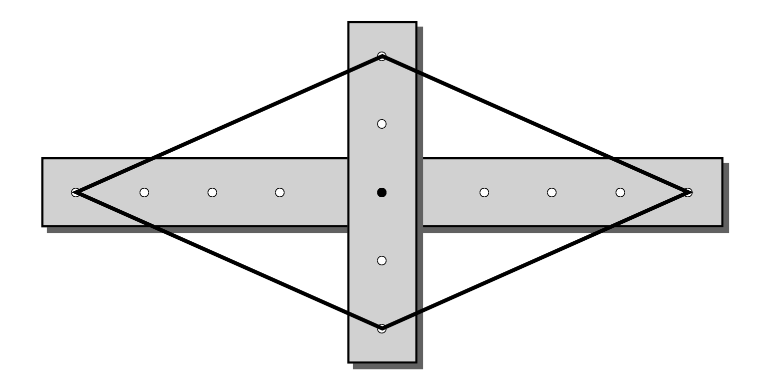
Entre los objetivos más importantes que se logran con el uso del geoplano se pueden mencionar:

- Permite la representación de la geometría, en los primeros años, de forma lúdica y atractiva y no de forma verbal y abstracta.

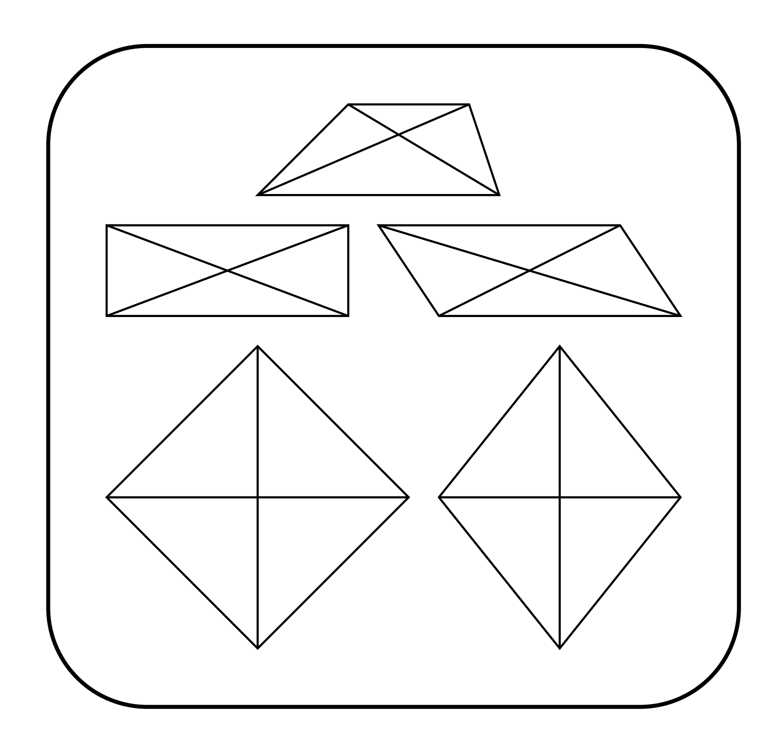
- Desarrolla la creatividad a través de la composición y descomposición de figuras geométricas.
- Permite a los niños descubrir por ellos mismos los conocimientos básicos de la geometría.
- Desarrolla la reversibilidad del pensamiento: la fácil manipulación de las bandas elásticas permite realizar transformaciones diversas y volver a la posición inicial.
- Induce a adquirir los conceptos de ángulo, vértice y lado.



Con reglas perforadas, hilo resistente y tornillos se crean modelos de figuras geométricas.



Los cuadriláteros dibujados a continuación se pueden construir usando reglas como diagonales.



De acuerdo con el ángulo que formen, el punto de intersección y la longitud de las diagonales es viable llegar a las siguientes conclusiones.

1. Si las diagonales no son perpendiculares, no se intersectan en su punto medio y tienen diferente longitud, el cuadrilátero es un trapecio.

2. Si las diagonales no son perpendiculares, se intersectan en su punto medio y tienen igual longitud, el cuadrilátero es un rectángulo.

3. Si las diagonales no son perpendiculares, se intersectan en su punto medio y tienen longitud diferente, el cuadrilátero es un paralelogramo.

4. Si las diagonales son perpendiculares, se intersectan en su punto medio y tienen igual longitud, el cuadrilátero es un cuadrado.

5. Si las diagonales son perpendiculares, se intersectan en su punto medio y tienen longitud diferente, el cuadrilátero es un rombo.

A partir de estas y otras observaciones es factible establecer diferencias, semejanzas y otras inferencias.

Los tangram son rompecabezas geométricos orientales muy populares de siete piezas con infinitas posibilidades de combinaciones y diferente grado de dificultad. Los hay desde el nivel preescolar en adelante.

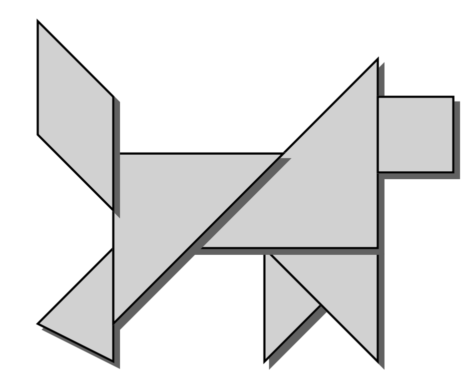
Según Jessica Bermúdez (2008):

> El propósito de los tangram es permitir la comprensión de las formas geométricas a través de juegos con los cuales se nombrarán, se encontrarán diferencias y similitudes y se identificarán las características que poseen.
>
> Investigar, realizar y evaluar conjeturas de contenido matemático en los cuales se utilizan y seleccionan diferentes tipos de razonamiento.
>
> Construir el conocimiento a través de la búsqueda de información para la solución de problemas de la asignatura o de otros contextos.

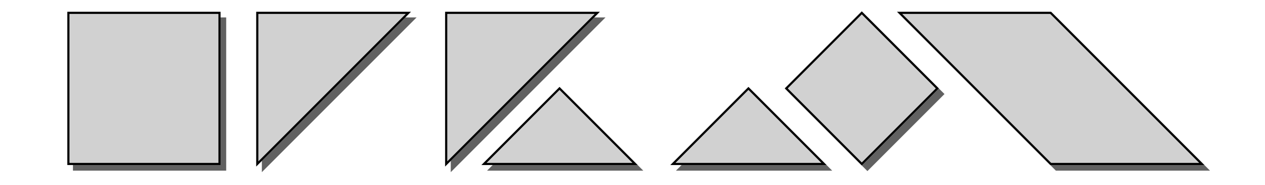
A través de actividades dirigidas y la solución de rompecabezas se deben establecer conclusiones u otro tipo de razonamientos.

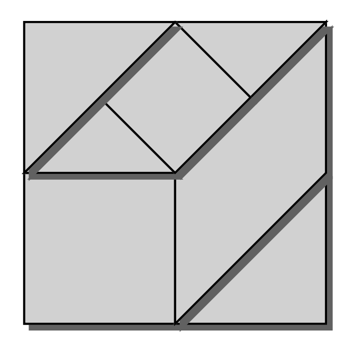
Los ejemplos siguientes son algunas de las múltiples posibilidades. Remitimos a los interesados al correo electrónico *chiqui_0707@hotmail.com* donde se describe el trabajo desarrollado por Jessica Bermúdez de Jesús.

La primera consistió en armar la figura del perro con siete elementos.

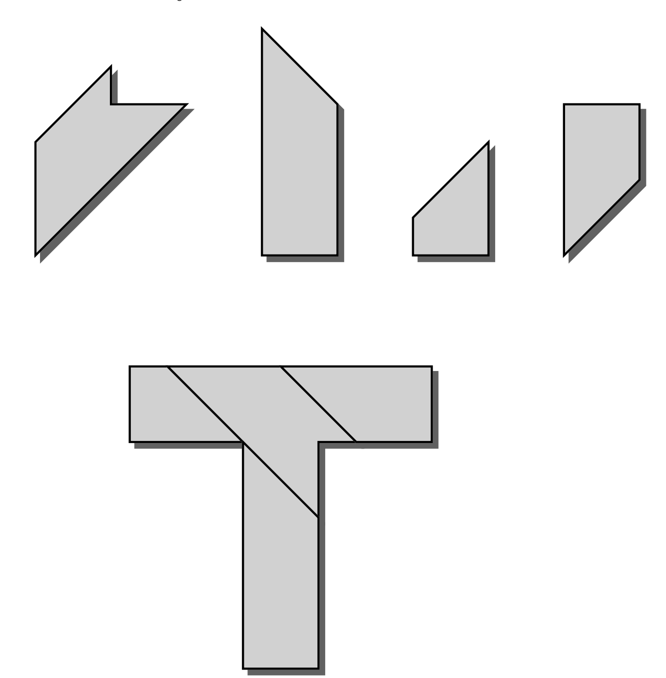


Esta actividad consiste en armar un cuadrado con las siete piezas.

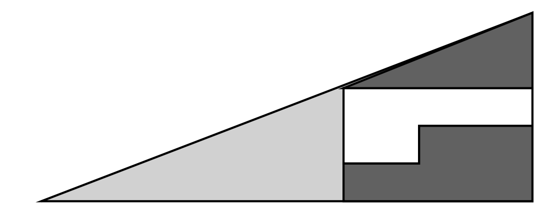




El próximo ejercicio consiste en armar la letra T. Este rompecabezas fue utilizado a principios del siglo XX en diversas publicidades de productos como el té White Rose Ceylon de New York.



Este último ejercicio consiste en armar el triángulo usando cuatro piezas.



Con papel de periódicos también se construyen figuras tridimensionales. Tome dos o tres hojas juntas, y para darle mayor consistencia, comience doblando por una esquina en forma diagonal, conformando tiras sólidas. Para confeccionar una determinada figura pegue las tiras con cinta adhesiva. Pruebe a construir pirámides, paralelepípedos, cubos, y lo que desee.



Pirámide construída con papel de periódicos.

El trabajo con plastilina, además de creativo, desarrolla la motricidad fina. Dé instucciones al estudiante para que construya una figura de acuerdo con las propiedades descritas para el caso. Estos retos promueven el pensamiento reflexivo acerca de las propiedades estudiadas y son una manera de alcanzar el próximo nivel sin presiones.

En el nivel uno las actividades deben enfocarse al análisis de las propiedades; por ejemplo, los triángulos se clasifican teniendo en cuenta la medida de sus ángulos y las diferencias entre sus lados. Este tipo de clasificaciones se promueven estableciendo semejanzas específicas que identifiquen una determinada clase, al igual que las diferencias con las de otro tipo.

Por ejemplo, las curvas cerradas se agrupan en cóncavas o convexas, simétricas o no. Entre las simétricas las hay con respecto a un eje o con simetría rotacional.

Los polígonos son regulares o irregulares de acuerdo con que sus lados sean congruentes o no. También son simétricos o asimétricos.

Los cuadriláteros convexos son aquellos polígonos convexos con exactamente cuatro lados. Entre ellos se distinguen los que son trapecios, paralelogramos, rectángulos, rombos, cuadrados.

Entre las diferentes categorías es necesario mencionar las subcategorías. Por ejemplo, en la clase de los cuadriláteros se encuentra inmersa la de los paralelogramos y, a su vez dentro de esta última, se ubica la de los cuadrados.

Mediante actividades específicas de clasificación es factible ayudar al establecimiento de las relaciones de contenencia entre clases. Promueva en el estudiante el uso de las expresiones *todas las anteriores*, *ninguna de las anteriores*, *algunas de las anteriores*, así como oraciones que establezcan condicionalidad.

Bibliografía

[1] Apostol, T. (1967). *Calculus*. Toronto: Xerox College Publishing.

[2] Bermúdez, J. (2008). *El fantástico mundo de la geometría a través de los tangramas*. [En línea: www.zonal.com.]

[3] Castro, R. y Caicedo, A. (2008). *Docencia e investigación*. Montería: Editorial Paloma.

[4] Chapman, M. (1988). *La evolución del constructivismo: orígenes y desarrollo del pensamiento de Piaget*. Cambridge: Cambridge University Press.

[5] Copeland, R. (1972). *Mathematics and the Elementary Teacher*. Toronto: W.B. Saunders Company.

[6] De Castro, R. (2004). *El universo LATEX*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

[7] De Zubiría, M. (1997). *Enfoques pedagógicos y didácticas contemporáneas*. Bogotá: F.I.P.C. Alberto Merani.

[8] Dilts, R. y Epstein, T. (1997). *Aprendizaje Dinámico con PNL*. Bogotá: Edicciones Urano.

[9] Gardner, H. (1999). *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples*. Bogotá: Fondo de Cultura Económica.

[10] Hashisaki, J. y Peterson, J. (1969). *Teoría de la Aritmética*. Toronto: Limusa–Wiley, S. A.

[11] Howden, H. (1989). *Teaching number sense. Arithmetic Teacher.*

[12] Larroyo, F. (1967). *Didáctica General.* Buenos Aires: Editorial Porrúa.

[13] Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, N. J: Erlbaum Associates.

[14] Ormrod, J. (2003). *Educational Psychology: Developing Learners.* Columbus: Prentice Hall.

[15] Pedoe D. (1970). *A course of geometry for Colleges and Universities.* Cambridge: Cambridge at the University Press.

[16] Pólya, G. (1957). *How to solve it. A new aspect of mathemathical method.* Princeton: Princeton University Press.

[17] Reston, V. (1995). *Assessment standards for school mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

[18] Rivière, A. (2002). *La Psicología de Vygotsky.* Madrid: Plaza Edición.

[19] Van de Walle, J. (1998). *Elementary and Middle School Mathematics: teaching developmentally.* Longman: Addison Wesley.

[20] Weiss, S. (1972). *Geometry: Content and strategy for teachers.* Belmont: Bodgen and Quigley, Inc., Publishers.

Otros títulos de interés:

- **Geometría descriptiva,**
  Germán Valencia Gaviria

- **Diseño geométrico de carreteras,**
  James Cárdenas Grisales

- **OpenOffice.org2.x. Todo lo que necesita saber sobre software libre,**
  Carlos Hernán González

- **Lógica de programación,**
  Efraín M.Oviedo Regino

- **Guía práctica de dibujo para ingeniería,**
  Germán Valencia García

- **Ingeniería de métodos, movimientos y tiempos,**
  Luis Carlos Palacios Acero

- **Hidráulica de ríos y procesos morfológicos,**
  Tomás Ochoa

Didáctica de las Matemáticas

De preescolar a secundaria



Didáctica de las matemáticas es una visión constructivista del aprendizaje de las matemáticas cuyos fundamentos son la formulación de problemas en el aprendizaje de las matemáticas de Pólya, la teoría histórico-genética de Piaget y el constructivismo social de Vigotsky.

El aporte principal de los autores consiste en presentar en forma coherente la interrelación entre la didáctica, la sicología y la pedagogía; tres tópicos claves en el proceso que ellos denominan aprendizaje- enseñanza, para resaltar la importancia del primero de los términos mencionados.

Recreando las ideas desarrolladas por G. Pólya; los autores proponen un método novedoso basado en la confección de guías de trabajo, con instrucciones fáciles de seguir, para inducir la construcción del conocimiento matemático.

Por su contenido, su enfoque y las soluciones que presenta esta obra debe ser material de lectura obligatoria para docentes en ejercicio y en formación; y en general para estudiosos e investigadores del tema.

Colección: Textos universitarios
Área: Educación y Pedagogía

